Ein teilweise freies Randwertproblem für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

Tomi, Friedrich

in: Periodical issue | Mathematatische Zeitschrift
- 115 | Periodical
9 page(s) (104 - 112)

Math. Z. 115, 104–112 (1970)

Ein teilweise freies Randwertproblem für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung

FRIEDRICH TOMI

1. Das Problem

Hildebrandt [7] hat kürzlich das Plateausche Problem für Flächen variabler mittlerer Krümmung untersucht, welches in der Aufgabe besteht, eine Fläche zu bestimmen, die von einer vorgegebenen Jordankurve berandet wird und eine als Ortsfunktion vorgeschriebene mittlere Krümmung besitzt. Die analytische Formulierung des Problems lautet folgendermaßen: Es sei $H=H(x)$ eine auf einer Teilmenge K des $\mathbb{R}^3$ definierte reellwertige Funktion, und Γ sei eine Jordankurve in $\mathbb{R}^3$, $\Gamma\subset K$. Als Parametergebiet der betrachteten Flächen sei

$$B:=\{\zeta=(u,v)\in\mathbb{R}^2\colon\; u^2+v^2<1\}$$

gewählt. Gesucht ist dann eine Abbildung

$$z\colon\; \bar{B}\to K,\qquad z\in C^0(\bar{B})\cap C^2(B),$$

welche das Differentialgleichungssystem

$$\Delta z=2H(z)\, z_u\wedge z_v, \tag{1}$$

$$z_u^2=z_v^2,\quad z_u z_v=0 \tag{2}$$

erfüllt und die weitere Eigenschaft besitzt, daß $z|\partial B$ eine Parametrisierung der Jordankurve Γ darstellt. Dabei sind z_u und z_v die partiellen Ableitungen von z nach u und v; $\wedge$ bedeutet das Vektorprodukt des $\mathbb{R}^3$, d.h. für $x, y\in\mathbb{R}^3$ ist $x\wedge y=(x^2y^3-x^3y^2, x^3y^1-x^1y^3, x^1y^2-x^2y^1)$.

Wir wollen hier die folgende Variante dieses Problems betrachten: Es sei zusätzlich eine Fläche in der Gestalt

$$x^3=f(x^1,x^2) \tag{3}$$

gegeben, so daß die Kurve Γ strikt „über" dieser Fläche liegt, d.h., daß die Punkte x von Γ der Ungleichung

$$x^3>f(x^1,x^2) \tag{4}$$

genügen. Gesucht ist dann eine Fläche $z=z(\zeta)$, die über der durch (3) gegebenen Fläche liegt, d.h. die Ungleichung

$$z^3(\zeta)\geqq f\big(z^1(\zeta),z^2(\zeta)\big),\qquad (\zeta\in\bar{B}), \tag{5}$$

erfüllt, fernerhin auf der Fläche (3) tangential aufsitzt (wenn sie das überhaupt tut) und in allen Punkten, die strikt über der Fläche (3) liegen, eine als Ortsfunktion vorgeschriebene mittlere Krümmung $H = H(x)$ besitzt. Diese von uns gesuchte Fläche kann physikalisch realisiert werden als Oberfläche eines Flüssigkeitstropfens, der an der scharfkantigen Ausflußöffnung eines Rohres hängt und außerdem teilweise auf einem festen Körper aufsitzt, welcher von der Flüssigkeit nicht benetzt wird. Dabei können noch äußere Kräfte auf die Flüssigkeit wirken[1]. Der an dem physikalischen Hintergrund interessierte Leser sei auf [10] verwiesen.

Bei der Lösung des oben beschriebenen Existenzproblems müssen wir entscheidend Gebrauch machen von einem kürzlich von Heinz und Hildebrandt [5] bewiesenen Resultat über die Anzahl der Verzweigungspunkte (Punkte mit $z_u \wedge z_v = 0$) bei Flächen variabler mittlerer Krümmung. Die Verwendung dieses Resultats bedingt ernsthafte quantitative Einschränkungen an die Daten des Problems.

Im Falle der vorgeschriebenen mittleren Krümmung $H \equiv 0$ können wir unter einer weiteren Einschränkung zeigen, daß die von uns konstruierte Fläche minimalen Flächeninhalt besitzt unter allen Flächen, welche über dem durch (3) gegebenen Hindernis liegen. Solche Minimalprobleme sind in nichtparametrischer Form von Nitsche [8] betrachtet worden.

Wir benötigen einige Begriffe und Bezeichnungen. Für Abbildungen z der Klasse $C^1(B)$ definieren wir das Dirichletintegral

$$D(z) := \int_B (z_u^2 + z_v^2)\, du\, dv.$$

Ferner setzen wir

$$K := \{x \in \mathbb{R}^3 \colon \ |x| \leqq 1\}$$

und nehmen

$$\Gamma \subset K$$

an. Ist dann $y = y(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, eine Parametrisierung von Γ, so definieren wir $\mathcal{D}$ als die Menge der Abbildungen $z\colon \bar{B} \to K$ mit den folgenden Eigenschaften:

(I) $$z \in C^0(\bar{B}) \cap C^1(B).$$

(II) $$D(z) < \infty.$$

(III) $$z(1) = y(0), \qquad z(i) = y(\tfrac{1}{3}), \qquad z(-1) = y(\tfrac{2}{3}).$$

(IV) Es gibt eine schwach monotone Abbildung $t = t(\tau)$ des Intervalles $[0, 1]$ auf sich mit $z(e^{2\pi i\tau}) = y(t(\tau))$, $0 \leqq \tau \leqq 1$.

Ferner setzen wir

$$\mathcal{D}^* := \{z \in \mathcal{D} \colon \ z \text{ erfüllt } (2)\},$$

$$\mathcal{D}_f := \{z \in \mathcal{D} \colon \ z \text{ erfüllt } (5)\},$$

$$\mathcal{D}_f^* := \mathcal{D}^* \cap \mathcal{D}_f.$$

[1] Der Autor verdankt Herrn Prof. Dr. S. Hildebrandt den Hinweis auf die physikalische Bedeutung des Problems.

Wir nehmen nun an, daß die Funktion $f=f(x^1, x^2)$ zur Klasse $C^3(\mathbb{R}^2)$ und die Kurve Γ zur Klasse C^3 gehören. Es sei

$$\lambda := \int_0^1 |dy(t)|$$

und

$$\kappa := \int_0^\lambda |y''(s)|\, ds,$$

wobei s die Bogenlänge von Γ bedeutet. Wir bezeichnen schließlich mit

$$H_f = H_f(x^1, x^2)$$

die mittlere Krümmung der durch (3) gegebenen Fläche und haben dann den folgenden

Satz. *Es sei* $H=H(x)\in C^1(\mathbb{R}^3)$ *und die Bedingungen*

$$h := \max\{\sup_K |H|, \sup_K |H_f|\} < 1 \tag{6}$$

und

$$\frac{\kappa}{2\pi} + \frac{h^2\lambda^2}{16\pi(1-h)} < 2 \tag{7}$$

seien erfüllt [2].

(I) *Dann gibt es ein* $z\in\mathfrak{D}_f^*$, *so daß* z *in einer Umgebung jedes Punktes* $\zeta\in B$, *für welchen die Ungleichung*

$$z^3(\zeta) > f(z^1(\zeta), z^2(\zeta))$$

besteht, zweimal stetig differenzierbar ist und dem System (1) *genügt. Ferner ist* $z|\partial B$ *eine Parametrisierung der Jordankurve* Γ *und es gilt*

$$z_u \wedge z_v \neq 0$$

in B, *sowie*

$$z\in C^{1+\alpha}(B)\cap C^{2+\alpha}(\{\zeta:\ r\leqq|\zeta|\leqq 1\})$$

für alle $\alpha\in(0,1)$ *und ein geeignetes* r, $0<r<1$.

(II) *Ist außerdem*

$$H\equiv 0$$

und

$$h < (2(1+\max f))^{-1}, \tag{8}$$

so gibt es ein z, *welches außer den in* (I) *genannten Eigenschaften die Minimaleigenschaft*

$$D(z) = \min_{z'\in\mathfrak{D}_f} D(z') \tag{9}$$

besitzt.

---

[2] Wie Herr Prof. Dr. S. Hildebrandt dem Autor freundlicherweise mitteilte, kann (7) durch die teilweise schwächere Forderung

$$\frac{\kappa}{2\pi} + \frac{h^2\lambda^2}{8\pi}\,\frac{1+\frac{2}{3}h}{1-\frac{2}{3}h} < 2$$

ersetzt werden. Dies folgt ebenfalls aus den Resultaten von [5].

2. Der Beweis

Es sei

$$Q\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

eine Vektorfunktion der Klasse $C^{1+\beta}(\mathbb{R}^3)$. Für $z \in \mathfrak{D}$ definieren wir dann das Funktional

$$E(z) := D(z) + \tfrac{4}{3} \int_B Q(z)(z_u \wedge z_v)\, du\, dv.$$

Nach Hildebrandt [7] gilt dann

Lemma 1. *Es sei*

$$\sup |Q| < \tfrac{3}{2}$$

und

$$\sup \tfrac{1}{3}|x|\,|\operatorname{div} Q| \leqq 1.$$

Dann existiert ein $z \in \mathfrak{D}^* \cap C^2(B)$ *mit*

$$E(z) = \min_{z' \in \mathfrak{D}} E(z')$$

und

$$\Delta z = \tfrac{2}{3} \operatorname{div} Q(z)\, z_u \wedge z_v.$$

Das nächste Lemma enthält eine geringfügige, für unsere Zwecke nützliche Verschärfung eines Resultats von Heinz und Hildebrandt [5] über die Anzahl der Verzweigungspunkte einer Fläche beschränkter mittlerer Krümmung.

Lemma 2. *Es sei* $z \in \mathfrak{D}^*$ *und* $z^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *sei eine Folge von Abbildungen der Klasse* $\mathfrak{D}^* \cap C^2(B)$. *Es gelte*

$$\Delta z^{(n)} = 2 h^{(n)} z_u^{(n)} \wedge z_v^{(n)} \tag{10}$$

mit reellen Funktionen $h^{(n)} \in C^\beta(\bar{B})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *welche der Abschätzung*

$$\sup_{n, B} |h^{(n)}| \leqq h_0 \tag{11}$$

mit einer positiven Konstanten h_0 *genügen. Ferner sei*

$$(z_u^{(n)}, z_v^{(n)}) \to (z_u, z_v) \quad (n \to \infty) \tag{12}$$

gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von B.

Dann gelten die folgenden Aussagen:

(I) *Ist* $\zeta_0 \in B$ *mit* $z_u(\zeta_0) \wedge z_v(\zeta_0) = 0$, *so gilt für* $\zeta \to \zeta_0$ *die asymptotische Darstellung*

$$z_u(\zeta) + i\, z_v(\zeta) = a(\zeta - \zeta_0)^k + o(|\zeta - \zeta_0|^k) \tag{13}$$

mit $a \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$, *und einer positiven ganzen Zahl k, welche als die Ordnung des Verzweigungspunktes* ζ_0 *bezeichnet wird.*

(II) *Sind* $\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in B$ *verschiedene Verzweigungspunkte von z mit den Ordnungen* $k_1, \ldots, k_N$, *so gilt die Ungleichung*

$$1 + \sum_{\nu=1}^{N} k_\nu \leqq \frac{\kappa}{2\pi} + \frac{h_0^2 \lambda^2}{16\pi(1 - h_0)}.$$

Beweis. Aus (10) und (11) entnehmen wir die für alle vektorwertigen Funktionen $y \in C_0^\infty(B)$ gültige Ungleichung

$$\Big|\int_B (z_u^{(n)} y_u + z_v^{(n)} y_v)\, du\, dv\Big| \leqq h_0 \int_B ((z_u^{(n)})^2 + (z_v^{(n)})^2)\, |y|\, du\, dv, \qquad (n=1,2,\ldots). \tag{14}$$

Wegen (12) können wir hierin den Grenzübergang $n \to \infty$ vollziehen und erhalten (14) für z statt $z^{(n)}$. Die asymptotische Darstellung (13) folgt nun aus einem Resultat von Hartman und Wintner [2] (vgl. auch [6], Lemma 3).

Seien nun $\zeta_1, \ldots, \zeta_N \in B$ verschiedene Verzweigungspunkte von z. Wegen (13) können wir eine positive Zahl δ finden, so daß die Punktmengen $\{\zeta \in B : |\zeta - \zeta_\nu| \leqq \delta\}$ in B enthalten und paarweise disjunkt sind und außerdem

$$|z_u(\zeta)| = |z_v(\zeta)| > 0 \quad \text{für } 0 < |\zeta - \zeta_\nu| \leqq \delta, \qquad \nu = 1, \ldots, N,$$

gilt. Sei nun r eine Zahl mit $0 < r < \delta$. Wegen (12) existiert dann ein $n_0 = n_0(r)$, so daß auch

$$|z_u^{(n)}(\zeta)| > 0 \quad \text{für } r \leqq |\zeta - \zeta_\nu| \leqq \delta, \qquad \nu = 1, \ldots, N \quad \text{und} \quad n \geqq n_0$$

gilt. Ist dann $\rho \in [r, \delta]$, so entnehmen wir aus [5], insbesondere Formel (2.9), die für $n \geqq n_0$ gültige Ungleichung

$$1 + \frac{1}{4\pi} \sum_{\nu=1}^{N} \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \rho} \log |z_u^{(n)}(\zeta_\nu + \rho e^{i\varphi})|^2 \rho\, d\varphi \leqq M(\Gamma, h_0) := \frac{\kappa}{2\pi} + \frac{h_0^2 \lambda^2}{16\pi(1-h_0)}.$$

Durch Integration dieser Ungleichung nach ρ zwischen den Grenzen r und R $(r < R \leqq \delta)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{4\pi(R-r)} \sum_{\nu=1}^{N} \Big\{ &\int_0^{2\pi} \log |z_u^{(n)}(\zeta_\nu + R e^{i\varphi})|^2 R\, d\varphi \\ &- \int_0^{2\pi} \log |z_u^{(n)}(\zeta_\nu + r e^{i\varphi})|^2 r\, d\varphi - \int_r^R \int_0^{2\pi} \log |z_u^{(n)}(\zeta_\nu + \rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi\, d\rho \Big\} \leqq M(\Gamma, h_0).\end{aligned}$$

Wenn wir in dieser Ungleichung nacheinander die Grenzübergänge $n \to \infty$, $r \to 0$, $R \to 0$ ausführen, ergibt sich die Behauptung des Lemmas.

Das folgende Lemma wird mit denselben Methoden bewiesen wie sie von Serrin in [9] (Theorem 1) benützt wurden. Zur Bequemlichkeit des Lesers sei jedoch der Beweis angefügt.

Lemma 3. *Es sei $\Omega \subset B$ ein Gebiet und z: $\bar{\Omega} \to K$ sei eine Fläche der Klasse $C^0(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, welche in Ω keine Verzweigungspunkte besitzt. Ferner sei*

$$z^3(\zeta) \geqq f(z^1(\zeta), z^2(\zeta)) \quad \text{für } \zeta \in \partial\Omega \tag{15}$$

und die mittlere Krümmung $h = h(\zeta)$ der Fläche z möge in Ω der Ungleichung

$$h(\zeta) \leqq H_f(z^1(\zeta), z^2(\zeta)) \tag{16}$$

genügen.

Dann gilt

$$z^3(\zeta) \geqq f(z^1(\zeta), z^2(\zeta)) \quad \text{für } \zeta \in \Omega.$$

Beweis. Es sei

$$\varphi(\zeta) := z^3(\zeta) - f\big(z^1(\zeta), z^2(\zeta)\big)$$

und

$$m := \min_{\Omega} \varphi .$$

Entgegen der Behauptung des Lemmas nehmen wir an, daß $m < 0$ ist. Es sei $\Omega_m := \{\zeta \in \Omega : \varphi(\zeta) = m\}$. Dann ist $\Omega_m \neq \emptyset$ und es genügt zum Beweis, wenn wir zeigen, daß Ω_m offen ist, da dann nämlich $\Omega_m = \Omega$ sein muß, im Widerspruch zu (15). Es sei also $\zeta_0 \in \Omega_m$. Dann ist

$$z_u^1(\zeta_0)\, z_v^2(\zeta_0) - z_u^2(\zeta_0)\, z_v^1(\zeta_0) \neq 0; \tag{17}$$

ansonsten wäre nämlich wegen $\nabla\varphi(\zeta_0) = 0$ auch $z_u(\zeta_0) \wedge z_v(\zeta_0) = 0$, entgegen der Voraussetzung, daß z keine Verzweigungspunkte besitzt. Wegen (17) ist die Abbildung

$$\zeta \mapsto w(\zeta) := \big(z^1(\zeta), z^2(\zeta)\big)$$

ein C^2-Diffeomorphismus einer Umgebung Ω' von ζ_0 auf eine Umgebung U von $w(\zeta_0)$. Die Fläche z erfüllt daher in Ω' eine Beziehung $z^3 = g(z^1, z^2)$ mit einer Funktion $g \in C^2(U)$, welche wegen (16) in U der Ungleichung

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial x^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial g}{\partial x^\nu} \right\} \\ &\quad \leq \sum_{\nu=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left\{ \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^2} \right)^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial f}{\partial x^\nu} \right\} \end{aligned} \tag{18}$$

genügt. Nach Konstruktion besitzt die Funktion $g - f$ in $w(\zeta_0)$ ein Minimum, nach (18) genügt sie in U einer gewissen linearen elliptischen Differentialungleichung, auf welche das Hopfsche Maximumprinzip anwendbar ist, mit dem Ergebnis, daß in U die Gleichung $g - f = \text{const} = g\big(w(\zeta_0)\big) - f\big(w(\zeta_0)\big) = m$ gelten muß. Dann folgt aber $\varphi(\zeta) = m$ für $\zeta \in \Omega'$, womit Ω_m als offen erkannt ist.

Nun kommen wir zum

Beweis des Satzes. (I) Es sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine reellwertige Funktion mit $0 \leqq \varphi \leqq 1$, $\varphi(t) = 1$ für $t \leqq 0$, und $\varphi(t) = 0$ für $t \geqq 1$. Für $n = 1, 2, \ldots$ setzen wir dann

$$\psi_n(x) := \varphi\big(n(x^3 - f(x^1, x^2))\big)$$

und

$$H_n(x) := \varphi\big(R(|x| - 1)\big)\big[\psi_n(x)\, H_f(x) + \big(1 - \psi_n(x)\big) H(x)\big].$$

Es gilt dann offenbar, falls $R > 0$ genügend groß gewählt wird,

$$\sup |x|\, |H_n(x)| \leqq h \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

wobei die Zahl h durch (6) definiert ist. Nach Hildebrandt [7] betrachtet man nun die Vektorfunktionen

$$Q_n(x) := \left(\int_0^{x^1} H_n(t, x^2, x^3)\, dt,\ \int_0^{x^2} H_n(x^1, t, x^3)\, dt,\ \int_0^{x^3} H_n(x^1, x^2, t)\, dt \right)$$

und die auf $\mathscr{D}$ erklärten Funktionale

$$E_n(z) := D(z) + \tfrac{4}{3} \int_B Q_n(z)(z_u \wedge z_v)\, du\, dv.$$

Wegen

$$\sup |Q_n| \leqq h$$

und

$$\tfrac{1}{3} \operatorname{div} Q_n(x) = H_n(x)$$

gibt es nach Lemma 1 ein $z^{(n)} \in \mathscr{D}^*$ mit

$$E_n(z^{(n)}) = \min_{z' \in \mathscr{D}} E_n(z') \tag{19}$$

und

$$\Delta z^{(n)} = 2 H_n(z^{(n)})\, z_u^{(n)} \wedge z_v^{(n)}. \tag{20}$$

Sei nun $z' \in \mathscr{D}$ beliebig. Dann erhalten wir aus (19) die Abschätzung

$$(1 - \tfrac{2}{3} h)\, D(z^{(n)}) \leqq E_n(z^{(n)}) \leqq E_n(z') \leqq (1 + \tfrac{2}{3} h)\, D(z').$$

Mit Hilfe des Lemmas von Lebesgue ([1], S. 101) und von Lemma 1 aus [5] folgt hieraus die gleichgradige Stetigkeit der $z^{(n)}$, $(n = 1, 2, \ldots)$. Vermöge der a-priori-Abschätzungen aus [3] (Theorem 2) können wir dann schließen, daß es ein $z \in \mathscr{D}^* \cap \bigcap_{0<\alpha<1} C^{1+\alpha}(B)$ und eine Teilfolge n_k $(k = 1, 2, \ldots)$ der natürlichen Zahlen gibt mit

$$z^{(n_k)} \to z \qquad (k \to \infty)$$

gleichmäßig in $\bar{B}$ und

$$(z_u^{(n_k)}, z_v^{(n_k)}) \to (z_u, z_v) \qquad (k \to \infty)$$

gleichmäßig in jeder kompakten Teilmenge von B.

Wegen (7) können wir aus Lemma 2 entnehmen, daß in B stets

$$z_u \wedge z_v \neq 0 \tag{21}$$

ist. Sei nun $\zeta_0 \in B$ mit

$$z^3(\zeta_0) > f(z^1(\zeta_0), z^2(\zeta_0)). \tag{22}$$

Dann gibt es eine Umgebung $U(\zeta_0)$ und ein k_0, so daß für $k \geqq k_0$ und $\zeta \in U(\zeta_0)$ die Ungleichung

$$z^{(n_k)3}(\zeta) \geqq f(z^{(n_k)1}(\zeta), z^{(n_k)2}(\zeta)) + \frac{1}{n_k}$$

besteht, woraus man schließt, daß für $\zeta \in U(\zeta_0)$ und $k \geqq k_0$ die Gleichung

$$H_{n_k}(z^{(n_k)}(\zeta)) = H(z^{(n_k)}(\zeta))$$

gelten muß. Wegen (20) folgt dann aber, daß z zu $C^{2+\beta}(U(\zeta_0))$ gehört und in $U(\zeta_0)$ der Differentialgleichung

$$\Delta z = 2 H(z)\, z_u \wedge z_v$$

genügt. Ebenso schließt man, daß es zu jedem $\zeta_1 \in B$ mit

$$z^3(\zeta_1) < f(z^1(\zeta_1), z^2(\zeta_1)) \tag{23}$$

eine Umgebung $V(\zeta_1)$ gibt, so daß z zu $C^2(V(\zeta_1))$ gehört und in $V(\zeta_1)$ die Differentialgleichung

$$\Delta z = 2H_f(z)\, z_u \wedge z_v \tag{24}$$

erfüllt. Wir nehmen nun an, daß es Punkte ζ_1 mit (23) gibt. Dann sei Ω eine Zusammenhangskomponente der Menge dieser Punkte. In Ω genügt z dann der Gl. (24), auf $\partial\Omega$ gilt $z^3 = f(z^1, z^2)$ und wir können wegen (21) aus Lemma 3 folgern, daß in $\bar{\Omega}$ die Ungleichung $z^3 \geqq f(z^1, z^2)$ gelten muß, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Somit ist gezeigt, daß z zu $\mathscr{D}_f$ gehört. Wenn wir berücksichtigen, daß wegen (4) die Ungleichung (22) für alle $\zeta_0 \in S_r := \{\zeta \colon r \leqq |\zeta| \leqq 1\}$ mit einem geeigneten $r \in (0, 1)$ gilt, so folgt aus einem Regularitätssatz von Heinz [4], daß sogar $z \in C^{2+\beta}(S_r)$ gilt. Die Tatsache, daß $z|\partial B$ eine Parametrisierung der Jordankurve ist, d.h. daß $z|\partial B$ injektiv abbildet, erhält man aus [7], Satz 3. Der erste Teil der Behauptungen des Satzes ist damit bewiesen.

(II) Es bleibt die für den Fall $H \equiv 0$ aufgestellte Zusatzbehauptung zu beweisen. Dazu setzen wir

$$H_n(x) := \varphi\big(R(|x|-1)\big)\, \psi_n(x)\, H_f(x)$$

und

$$Q_n(x) := \left(0, 0, -3\int_{x^3}^{\infty} H_n(x^1, x^2, t)\, dt\right).$$

Es gilt

$$\tfrac{1}{3}\operatorname{div} Q_n(x) = H_n(x)$$

und wegen (8) haben wir

$$\sup |Q_n| \leqq 3 \int_{-1-1/R}^{\max f + \frac{1}{n}} h\, dt \leqq 3h\left(1 + \frac{1}{R} + \max f + \frac{1}{n}\right) < \tfrac{3}{2}$$

für $n \geqq N$. Ferner bemerken wir die Abschätzung

$$|Q_n(x)| \leqq 3h\left(\max\{f(x^1, x^2) - x^3, 0\} + \frac{1}{n}\right). \tag{25}$$

Die Definition von E_n sowie die Konstruktion der Folge $z^{(n)}$ $(n \geqq N)$, der Teilfolge $z^{(n_k)}$ und ihres Grenzwertes z nehmen wir entsprechend dem ersten Teil des Beweises vor. Es bleibt also nur (9) zu zeigen. Dazu sei $z' \in \mathscr{D}_f$. Da auch z zu $\mathscr{D}_f$ gehört, folgen aus (25) die Limesrelationen

$$Q_{n_k}(z') \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

und

$$Q_{n_k}(z^{(n_k)}) \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

gleichmäßig in $\bar{B}$. Aus (19) können wir dann aber

$$\begin{aligned} D(z) &\leqq \liminf_{k\to\infty} D(z^{(n_k)}) = \liminf_{k\to\infty} E_{n_k}(z^{(n_k)}) \\ &\leqq \liminf_{k\to\infty} E_{n_k}(z') = D(z') \end{aligned}$$

entnehmen, womit alles gezeigt ist.

Literatur

1. Courant, R.: Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces. New York-London: Interscience 1950.
2. Hartman, P., Wintner, A.: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449–476 (1953).
3. Heinz, E.: On certain nonlinear elliptic differential equations and univalent mappings. J. Analyse Math. **5**, 197–272 (1956/57).
4. – Über das Randverhalten quasilinearer elliptischer Systeme mit isothermen Parametern. Math. Z. **113**, 99–105 (1970).
5. – Hildebrandt, S.: On the number of branch points of surfaces of bounded mean curvature. J. Differential Geometry (erscheint demnächst).
6. – Tomi, F.: Zu einem Satz von Hildebrandt über das Randverhalten von Minimalflächen. Math. Z. **111**, 372–386 (1969).
7. Hildebrandt, S.: Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie. I. Fest vorgegebener Rand. Math. Z. **112**, 205–213 (1969).
8. Nitsche, J. C. C.: Variational problems with inequalities as boundary conditions or how to fashion a cheap hat for Giacometti's brother. Arch. Rat. Mech. Analysis **35**, 83–113 (1969).
9. Serrin, J.: On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve. Math. Z. **112**, 77–88 (1969).
10. Wolf, K. L.: Tropfen, Blasen und Lamellen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1968.

Dr. Friedrich Tomi
Mathematisches Institut der Universität
D-34 Göttingen
Bunsenstr. 3–5

(Eingegangen am 26. Januar 1970)