

Konvergenzverhalten bei der numerischen Lösung von Randwertproblemen mittels eines Doppelschichtpotential-Ansatzes*

Silke Stiller, Münster

Eingegangen am 16. Mai 1978

Zusammenfassung — Abstract

Konvergenzverhalten bei der numerischen Lösung von Randwertproblemen mittels eines Doppelschichtpotential-Ansatzes. Ein Ansatz zur numerischen Lösung von Randwertproblemen im \mathbb{R}^2 beruht darauf, die gesuchte harmonische Funktion als Doppelschichtpotential bzw. mittels der 3. Greenschen Formel darzustellen und die entstandenen Integralgleichungen 2. Art durch Diskretisierung zu lösen. In der vorliegenden Arbeit wird für konvexe Gebiete Existenz und Eindeutigkeit der numerischen Lösung und für Dirichlet-Probleme in streng konvexen Gebieten mit glattem Rand die Konvergenzordnung hergeleitet.

On the Convergence Properties of the Numerical Solution of Boundary Value Problems by Means of Double Layer Potentials. To solve boundary value problems in \mathbb{R}^2 numerically one may use the representation of its solution by means of double layer potentials resp. the 3rd Green's formula. The resulting integral equations of the second kind are treated by discretization. In this note we establish existence and uniqueness of the numerical solution for convex domains and derive the order of convergence for the Dirichlet-problem if the domain is strictly convex and has a smooth boundary.

1. Einleitung

Zur numerischen Lösung von Dirichlet- und Neumann-Problemen in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2$, dessen Rand S stückweise glatt ist, kann auf die klassische Methode zurückgegriffen werden, die gesuchte harmonische Funktion u als Potential der doppelten Schicht bzw. mittels der dritten Greenschen Formel darzustellen; eine von G. T. Symm [4], [5], [7]—[10] an zahlreichen Beispielen erprobte numerische Methode besteht nun darin, die auf diese Weise entstehenden Integralgleichungen durch Stieltjes-Diskretisierung zu lösen. Symm und Jawsonev geben jedoch auch in ihrer neuesten Veröffentlichung [4] wieder an, daß eine theoretische Behandlung und damit eine fundierte Fehlerabschätzung dieser Verfahren weitgehend unbekannt sei. Im folgenden sollen für

* Auszug aus einer Diplomarbeit, die an der Universität Münster unter Anleitung von Prof. H. Werner entstand.

die numerische Lösung der Integralgleichungen 2. Art mit Doppelschicht-Kern Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen gemacht und für den Doppelschicht-Ansatz zur Lösung des Dirichlet-Problems eine Fehlerabschätzung angegeben werden.

Gibt man auf S Funktionswerte f vor, so führt der Doppelschicht-Ansatz zu einer Integralgleichung 2. Art für die Belegung σ (Courant u. Hilbert, [2], S. 300):

$$f(\mathbf{p}) = - \int_S \sigma(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q} + \alpha_p \sigma(\mathbf{p}) \quad (1)$$

$\mathbf{p} \in S$, α_p der nach innen gerichteten Scheitelwinkel zwischen den Tangenten an S im Punkt \mathbf{p} . Ferner bezeichnet $\int_S d\mathbf{q}$ die Integration über den Bogen. Zur numerischen Lösung werde der Rand S so in N Randstücke S_i unterteilt, daß etwaige Ecken Unterteilungspunkte sind, und die Belegung auf jedem Randstück S_i durch eine Konstante σ_i approximiert. Die so entstandene approximierende Funktion u_h wertet man an den Mittelpunkten (im Sinne gleicher Bodenlänge) \mathbf{q}_j der Randstücke S_i aus und erhält das Gleichungssystem (2) zur Bestimmung der N Konstanten σ_i :

$$f(\mathbf{q}_j) = - \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{q}_j| d\mathbf{q} + \pi \sigma_j, \quad j=1, \dots, N \quad (2)$$

Besitzt (2) eine Lösung, so bestätigen die Ergebnisse von Symm, daß die Funktion u_h mit

$$\begin{aligned} u_h(\mathbf{p}) &= - \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q}, \quad \mathbf{p} \in G \\ u_h(\mathbf{p}) &= - \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q} + \pi \sigma_j, \quad \mathbf{p} \in \tilde{S}_j \end{aligned} \quad (3)$$

$\tilde{S}_j = S_j \setminus \{\text{Endpunkte}\}$, eine brauchbare Approximation liefert. Analog erhält man zur Lösung des Neumann-Problems bei vorgegebener Normalableitung g mit der dritten Greenschen Formel aus der Integralgleichung

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\alpha_p} \left[\int_S g(\mathbf{q}) \cdot \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q} - \int_S u(\mathbf{q}) \cdot \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q} \right] \quad (4)$$

durch Diskretisierung das System

$$- \sum_{i=1}^N u_i \cdot \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{q}_j| d\mathbf{q} - \alpha_{q_j} u_j = - \sum_{i=1}^N g(\mathbf{q}_i) \int_{S_i} \log |\mathbf{q} - \mathbf{q}_j| d\mathbf{q}, \quad j=1, \dots, N \quad (5)$$

und damit die Approximation

$$u_h(\mathbf{p}) = \frac{1}{\alpha_p} \left[\sum_{i=1}^N g(\mathbf{q}_i) \int_{S_i} \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q} - \sum_{i=1}^N u_i \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |\mathbf{q} - \mathbf{p}| d\mathbf{q} \right], \quad (6)$$

$\mathbf{p} \in G \cup S$ und $\alpha_p = 2\pi$ für $\mathbf{p} \in G$.

Dabei wurde zur Berechnung des Potentials der einfachen Schicht mit Belegung g ebenfalls eine Diskretisierung vorgenommen. Die Systeme (2) und (5) sind von der Form

$$(A + \pi E)(\sigma) = (f) \tag{2'}$$

$$(A - \pi E)(u) = (g) \tag{5'}$$

mit

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N}}$$

und

$$a_{ij} = - \int_{S_j} \log |q - q_i| dq,$$

$$(\sigma) = (\sigma_1, \dots, \sigma_N)^T,$$

$$(f) = (f(q_1), \dots, f(q_N))^T, (u) = (u_1, \dots, u_N)^T, (g) = (g_1, \dots, g_N)^T$$

mit

$$g_j = - \sum_{i=1}^N g(q_i) \int_{S_i} \log |q - q_j| dq$$

Die Matrixelemente a_{ij} sind Doppelschicht-Potentiale über nicht geschlossenen Kurven S_j mit der Belegung -1 und als solche geometrisch interpretierbar: Der Wert in einem Punkt $p \notin S_j$ ist gleich dem Winkel, unter dem man die Endpunkte von S_j von p aus sieht. Genauer sei nun S_j Randstück des konvexen Gebietes G mit Rand S und $p \in S \setminus S_j$.

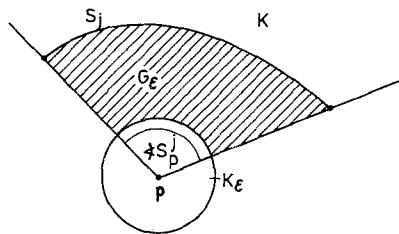


Abb. 1

Dann gilt: Sei K_ϵ ein Kreis um p mit Radius $\epsilon < d(p, S_j)$. Für $p \notin S_j$ sei $\pm S_p^j$ als der Winkel des Kegels K definiert, der durch Verbinden der Endpunkte von S_j mit p entsteht und für den gilt: p liegt nicht in dem Gebiet G_ϵ , dessen Rand von $S_j, \partial K_\epsilon \cap K, \partial K \setminus K_\epsilon$ gebildet wird.

Lemma 1.1: (Vgl. Courant-Hilbert [2], S. 296.) Mit den genannten Bezeichnungen erhält man:

$$a_{ij} = - \int_{S_j} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |q - q_i| dq = \pm \pm S_{q_i}^j, \quad i \neq j.$$

Dabei gilt das „+“-Zeichen, falls ein Weg existiert, der von q_j ausgehend im Kegel K verläuft und, ohne S_j zuvor geschnitten zu haben, sich dem Randstück S_j von der Seite her annähert, nach der die Normale n_q weist. In dieser Arbeit ist n_q immer die innere Normale. Bei der Interpretation der Diagonalelemente, wenn q_i also aus dem Integrationsbereich ist, muß man die Sprungrelation des Doppelschichtpotentials beim Übergang zum Rand beachten: Man erhält:

$$a_{ii} = \lim_{\substack{p \rightarrow q_i \\ p \in G}} \times S_p^i - \pi.$$

2. Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen

Mit der geometrischen Interpretation von Lemma 1.1 lassen sich leicht einige Eigenschaften der Matrix A nachweisen. Im folgenden sei das Gebiet G stets konvex und mit Ausnahme endlich vieler Ecken sei der Rand S zweimal stetig differenzierbar.

Lemma 2.1: *Es gilt $A \geq 0$ und $\sum_{j=1}^N |a_{ij}| = \pi \quad \forall i = 1, \dots, N$.*

Beweis: Aus der Konvexität von G folgt mit Lemma 1.1 $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, N\}: a_{ij} \geq 0$. Außerdem gilt (vgl. Courant/Hilbert [2], S. 301):

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} = - \int_S \frac{\partial}{\partial n_q} \log |q - q_i| dq = \pi.$$

Wesentlich für das folgende Lemma ist die Eigenschaft (*) von konvexen Gebieten: Liegen drei Punkte des Randes S auf einer Geraden, so gehören auch ihre Verbindungsstrecken zu S .

Lemma 2.2: *A ist irreduzibel.*

Beweis: Es genügt zu zeigen (Varga [11], S. 20): Der A zugeordnete Graph $G(A)$ ist zusammenhängend. Falls $a_{ij} \neq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, N\}$ ist nichts zu zeigen. Also gelte $OE a_{1j_0} = 0$. Es wird gezeigt:

$$\exists j \in \{1, \dots, N\}, 1 \neq j \neq j_0: a_{1j} \neq 0 \neq a_{jj_0}.$$

Sei g_j die Gerade durch die Endpunkte von S_j ; h_j sei die Verbindungsstrecke der Endpunkte von $S_j, h_j \subset g_j$. Dann gilt:

$$a_{ij} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_i \in h_j & \text{falls } i = j \\ q_i \in g_j \setminus h_j & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

Speziell:

$$a_{1j_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} q_1 \in h_1 & \text{falls } j_0 = 1 \\ q_1 \in g_{j_0} \setminus h_{j_0} & \text{falls } j_0 \neq 1 \end{cases}$$

Da S geschlossene Kurve, $G \neq \emptyset$ und q_i Mittelpunkt von $S_i \forall i$, gibt es ein $j \in \{1, 2, \dots, N\}$, $1 \neq j \neq j_0: q_j \notin g_{j_0} \Leftrightarrow a_{jj_0} \neq 0$. Falls $q_1 \notin g_j$ folgt $a_{1j} \neq 0$, und es bleibt nichts mehr zu zeigen. Sei also $q_1 \in g_j$. Falls $q_1 \in h_j$ ist nichts zu zeigen, da $j \neq 1$ und somit $a_{1j} = \pi \neq 0$. Sei also $q_1 \in g_j \setminus h_j$. Falls $j_0 = 1$ hat man nun: $q_1 \in h_1$ und damit wegen der Eigenschaft (*) für konvexe Gebiete: S_1 ist ein Geradenstück; außerdem gilt aber: $q_1 \in g_j \setminus h_j$ und damit ebenfalls wegen (*): S_j ist ein Geradenstück, und die Verbindungsstrecke zwischen q_1 und den Endpunkten von S_j liegt auf S . Da G aufgrund der Konvexität keinen Schlitz und keine Spitze aufweisen kann, muß gelten: $S_j \subset g_1$ im Widerspruch zu $q_j \notin g_{j_0} \equiv g_1$.

Im Falle $j_0 \neq 1$ gilt: $q_1 \in g_{j_0} \setminus h_{j_0}$, $q_1 \in g_j \setminus h_j$. Mit (*) folgt: $S_{j_0} \subset g_{j_0}$, $S_j \subset g_j$ und die Verbindungsstrecken zwischen q_1 und den Endpunkten von S_{j_0} sowie zwischen q_1 und den Endpunkten von S_j gehören zu S . Da $q_j \in g_{j_0}$ folgt: q_1 ist Ecke von S im Widerspruch zur Diskretisierung.

Lemma 2.3: A ist primitiv, d. h. A ist nichtnegativ, irreduzibel und hat nur einen Eigenwert, der dem Betrage nach gleich dem Spektralradius $\rho(A)$ ist.

Beweis: Da A nichtnegativ ist, genügt es zu zeigen (Varga [11], S. 41):

$$\exists m \in \mathbb{N} : A^m > 0.$$

- i) S habe mindestens einen gekrümmten Teilrand S_{i_0} . Dann gilt $a_{i_0 i_0} > 0$, und da A irreduzibel ist, folgt (Bohl [1], S. 111) $A^{2N-2} > 0$.
- ii) S sei ein Polygon. Es wird gezeigt: $A^2 = (a_{ik}^{(2)}) > 0$. Da $G \neq \emptyset$, existieren mindestens drei Seiten, die nicht auf einer Geraden liegen. Da Ecken nach Konstruktion Unterteilungspunkte sind, liegt auf jeder Polygonseite mindestens ein S_j und jedes S_j liegt auf genau einer Polygonseite. Seien S_i und S_k also zwei Randstücke, so läßt sich immer ein j so wählen, daß S_j auf einer anderen Polygonseite liegt, und wegen der Konvexität folgt: $a_{ij} \neq 0$, $a_{jk} \neq 0$, und damit $a_{ik}^{(2)} > 0$.

Damit folgen die Existenz- und Eindeutigkeitsätze.

Satz 2.4: Sei G konvex, $S \in C^2$ mit Ausnahme endlich vieler Ecken. Dann hat das Verfahren (2) zur Lösung des Dirichlet-Problems eine eindeutige Lösung.

Beweis: Nach Lemma 2.1 ist A nichtnegativ, und es gilt

$$\sum_{j=1}^N |a_{ij}| = \pi \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Daraus folgt sofort wegen der Irreduzibilität von A (Varga [11], S. 31): $\rho(A) = \pi$. π wird als Eigenwert angenommen (Varga [11], S. 30) und wegen der Primitivität von A ist $-\pi$ dann kein Eigenwert. Also ist $A + \pi E$ nichtsingulär.

Für das Neumann-Problem erwartet man keine Eindeutigkeit der Lösung:

Satz 2.5: Sei G konvex, $S \in C^2$ mit Ausnahme endlich vieler Ecken. Dann hat das Verfahren (5) zur Lösung des Neumann-Problems einen eindimensionalen Lösungsraum, falls $g \perp \{z / (A^T - \pi E)z = 0\}$.

Beweis: Für nichtnegative irreduzible Matrizen ist $\rho(A)$ ein einfacher Eigenwert (Varga [11], S. 30). Also hat $A - \pi E$ den Rang $N - 1$ und (5) einen eindimensionalen Lösungsraum, falls das System lösbar.

3. Fehlerabschätzung

Mit der Winkelinterpretation überlegt man sich leicht, daß trotz Unstetigkeit in den Unterteilungspunkten des Randes, aus dem Maximumsprinzip folgt, daß die Approximation u_h sich durch ihre Randwerte abschätzen läßt. Genauer gilt auch für den Fehler:

$$\sup_{p \in G} |u(p) - u_h(p)| \leq \max_{i=1, 2, \dots, N} \sup_{p \in S_i} |u(p) - u_h(p)| \tag{7}$$

Im Spezialfall eines kreisförmigen Gebietes kommt man zu einer Fehlerabschätzung für das Dirichlet-Problem, indem man die bekannte geometrische Eigenschaft des Kreises ausnutzt, daß Randwinkel über der gleichen Sehne übereinstimmen. Man kann dann schließen, daß die Approximation u_h auf jedem Teilrand S_j konstant gleich dem Randwert im Mittelpunkt des Teilrandes $f(q_j)$ ist, und bei genügend glatten Randwerten erhält man in jedem Kompaktum $\mathfrak{K} \subset G$ eine $O(h^2)$ -Konvergenz, h die maximale Bogenlänge der Randstücke S_j . Mit Hilfe differentialgeometrischer Überlegungen hat D. Gaier, der bei Konstruktion konformer Abbildung eines Gebietes G auf den Einheitskreis ebenfalls auf die Integralgleichung 1.3 geführt wurde, eine analoge geometrische Eigenschaft für konvexe Gebiete bewiesen und mit deren Hilfe eine obere Schranke für die Zeilensummennorm von $(A + \pi E)^{-1}$ gefunden. Nach Gaier gilt [3]:

$$\|(A + \pi E)^{-1}\|_z \leq \frac{4 R_{\max}}{L} + \frac{1}{2\pi}, \tag{8}$$

Dabei ist R_{\max} der maximale Krümmungsradius von S und L die Bogenlänge von S . Die Abschätzung ist jedoch nur für streng konvexe Gebiete brauchbar.

Außer (8) geht in die Fehlerabschätzung noch ein, daß die Belegung σ in der Darstellung von u als Doppelschichtpotential stetig differenzierbar ist, falls $S \in C^2$ und $f \in C^1$ (vgl. Schauder [6], Courant/Hilbert [2]).

Satz 3.1: Sei G ein streng konvexes Gebiet, $S \in C^2$; u sei die Lösung des Dirichlet-Problems in G mit Randwerten $f \in C^1$. Dann gilt für die durch das Verfahren (2) gewonnene Approximation u_h :

$$|u(p) - u_h(p)| = O(h) \quad \forall p \in G \cup S.$$

Beweis: Für die analytische Lösung u gilt in den Mittelpunkten q_j der Randstücke S_j :

$$\begin{aligned} u(q_j) = f(q_j) &= - \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \sigma(q) \frac{\partial}{\partial n_q} \log |q - q_j| dq + \pi \sigma(q_j) \\ &= - \sum_{i=1}^N \sigma(q_i) \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_q} \log |q - q_j| dq + \pi \sigma(q_j) + b, \end{aligned}$$

mit

$$b_j := \sum_{i=1}^N \int_{S_i} (\sigma(\mathbf{q}_i) - \sigma(\mathbf{q})) \cdot \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{q}}} \log |\mathbf{q} - \mathbf{q}_j| d\mathbf{q}.$$

Andererseits gilt für die Approximation u_h nach (2)

$$u_h(\mathbf{q}_j) = f(\mathbf{q}_j) = - \sum_{i=1}^N \sigma_i \int_{S_i} \frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{q}}} \log |\mathbf{q} - \mathbf{q}_j| d\mathbf{q} + \sigma_j \cdot \pi.$$

Damit ergibt sich:

$$B \cdot (\sigma(\mathbf{q}_i) - \sigma_i)_{i=1, \dots, N} = (b_j)_{j=1, \dots, N} \quad \text{mit } B = A + \pi E. \quad (9)$$

Um die Komponenten des Vektors (b) abzuschätzen, wird nach der Bogenlänge parametrisiert; $\phi: [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sei die Parametrisierung von S , L die Bogenlänge von S . Es gilt dann $\phi \in C^2$ und $\|\phi'(t)\| = 1$. Weiterhin gelte $\phi(s_i) = \mathbf{q}_i \forall i$, und h_i sei die Bogenlänge von S_i .

Man erhält:

$$|b_j| \leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} (\tilde{\sigma}(t) - \tilde{\sigma}(s_i)) \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial n_{\mathbf{q}}} \log |\phi(t) - \phi(s_j)| \right) dt \right|$$

mit $\tilde{\sigma} = \sigma \circ \phi \in C^1 [0, L]$. Da der Integralkern wegen der Konvexität positiv ist für alle $t \in [0, L]$, ergibt sich mit dem verallgemeinerten Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} |b_j| &\leq \frac{h}{2} \max_{t \in [0, L]} |\tilde{\sigma}'(t)| \cdot \left(\sum_{i=1}^N \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \phi(s_j)| \right) dt \right) \\ &= \frac{h}{2} \max_{t \in [0, L]} |\tilde{\sigma}'(t)| \cdot \pi \end{aligned}$$

Mit (8) folgt:

$$\|(\sigma(\mathbf{q}_i) - \sigma_i)\|_{\infty} \leq \left(\frac{4 R_{\max}}{L} + \frac{1}{2\pi} \right) \cdot \frac{h}{2} \cdot \pi \cdot \max_{t \in [0, L]} |\tilde{\sigma}'(t)| = O(h). \quad (10)$$

Für den bei der Approximation begangenen Fehler erhält man nun für $\mathbf{p} \in \tilde{S}_j$, $\mathbf{p} = \phi(s)$:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{p}) - u_h(\mathbf{p})| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} (\tilde{\sigma}(t) - \tilde{\sigma}(s_i)) \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \phi(s)| \right) dt \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\sigma}(s) - \tilde{\sigma}(s_j)) \pi + \sum_{i=1}^N \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} (\tilde{\sigma}(s_i) - \sigma_i) \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \phi(s)| \right) dt \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{\sigma}(s_j) - \sigma_j) \cdot \pi \right| \end{aligned}$$

Mit (10) ergibt sich:

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{p}) - u_h(\mathbf{p})| &\leq \max_{t \in [0, L]} |\tilde{\sigma}'(t)| \cdot \pi \cdot \frac{h}{2} + \pi \max_{t \in [0, L]} |\tilde{\sigma}(t)| \\ &+ \max_{t \in [0, L]} |\tilde{\sigma}'(t)| \cdot \pi \cdot \frac{h}{2} \left(\frac{4 R_{\max}}{L} + \frac{1}{2\pi} \right) \cdot 2\pi \\ &= O(h) \quad \forall \mathbf{p} \in \tilde{S}_j \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, N\}. \end{aligned}$$

Mit (7) folgt die Behauptung.

Für genügend glatte Gebiete kann man für Punkte aus einem in G enthaltenen Kompaktum \mathfrak{R} quadratische Konvergenz beweisen. Wenn $S \in C^4$ ist, so läßt sich nämlich zeigen (vgl. Courant/Hilbert [2], S. 300), daß der Kern

$$K(s, t) := -\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \phi(s)|$$

auf $[0, L]^2$ zweimal stetig differenzierbar ist; damit erhält man, falls die Randwerte $f \in C^2(S)$ sind, für die Belegung $\tilde{\sigma} : \tilde{\sigma} \in C^2[0, L]$.

Satz 3.2: Sei G ein streng konvexes Gebiet, $S \in C^4$. u sei die Lösung des Dirichlet-Problems mit Randwerten $f \in C^2$. $\mathfrak{R} \subset G$ sei ein Kompaktum. Dann gilt für die durch das Verfahren (2) gewonnene Approximation u_h : $|u(\mathbf{p}) - u_h(\mathbf{p})| = O(h^2) \quad \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{R}$.

Beweis: Die Gleichung

$$B \cdot (\sigma(\mathbf{q}_i) - \sigma_i)_{i=1, \dots, N} = (b_j)_{j=1, \dots, N} \quad (11)$$

ergibt sich analog zu (9). Da $\tilde{\sigma} \in C^2$ und $K(s, t) \in C^2$ läßt sich die rechte Seite jedoch besser abschätzen:

$$\begin{aligned} |b_j| &= \left| \sum_{i=1}^N \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} (\tilde{\sigma}(t) - \tilde{\sigma}(s_i)) \left(-\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \phi(s_j)| \right) dt \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} \left((t - s_i) \tilde{\sigma}'(s_i) + \frac{(t - s_i)^2}{2} \tilde{\sigma}''(\xi_i(t)) \right) \cdot \left(K(s_j, s_i) + (t - s_i) \cdot \frac{\partial}{\partial t} K(s_j, \tau_i(t)) \right) dt \right| \\ &\quad \xi_i(t), \tau_i(t) \in \left[s_i - \frac{h_i}{2}, s_i + \frac{h_i}{2} \right]. \end{aligned}$$

Der in $(t - s_i)$ lineare Term fällt bei der Integration heraus und man erhält:

$$|b_j| \leq \sum_{i=1}^N O(h_i^3) = O(h^2).$$

Damit folgt:

$$\|(\sigma(\mathbf{q}_i) - \sigma_i)\|_{\infty} = O(h^2). \quad (12)$$

Für den bei der Approximation begangenen Fehler erhält man damit für $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}$:

$$|u(\mathbf{p}) - u_n(\mathbf{p})| \leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} (\tilde{\sigma}(t) - \tilde{\sigma}(s_i)) \left(-\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \mathbf{p}| \right) dt \right|$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left| \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} (\tilde{\sigma}(s_i) - \sigma_i) \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \mathbf{p}| \right) dt \right| =: I_1 + I_2.$$

I_2 läßt sich wegen (12) und der Positivität des Kerns mit $2\pi \cdot O(h^2) = O(h^2)$ abschätzen. In I_1 wird $K(\mathbf{p}, \phi(t)) := -\frac{\partial}{\partial n_t} \log |\phi(t) - \mathbf{p}|$ als Funktion von t auf jedem Randstück jeweils um s_i entwickelt, denn wegen $\mathbf{p} \in \mathfrak{R}$ ist $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ nach \mathbf{q} differenzierbar. $K(\mathbf{p}, \phi(s_i))$ sowie $\frac{\partial}{\partial t} K(\mathbf{p}, \phi(t))$ läßt sich dem Betrage nach gleichmäßig beschränken. Damit ergibt sich:

$$I_1 = \sum_{i=1}^N \left| \int_{s_i - \frac{h_i}{2}}^{s_i + \frac{h_i}{2}} \left((t - s_i) \tilde{\sigma}'(s_i) + \frac{(t - s_i)^2}{2} \tilde{\sigma}''(\eta_i(t)) \right) \cdot \left(K(\mathbf{p}, \phi(s_i)) \right. \right.$$

$$\left. \left. + (t - s_i) \frac{\partial}{\partial t} [K(\mathbf{p}, \phi(\xi_i(t)))] \right) dt \right|$$

$$= O(h^2).$$

Insgesamt folgt die Behauptung.

4. Numerisches Beispiel

Anhand eines kreisförmigen Gebietes soll die Gültigkeit der Konvergenzaussagen aus Kapitel 3 noch einmal demonstriert werden.

Sei G die Einheitskreisscheibe und u die in G harmonische Funktion mit den Randwerten $f(\mathbf{p}) = 3 + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \quad \forall \mathbf{p} = (1, \theta) \in S$. u hat dann die Gestalt $u(r, \theta) = 3 + r \cdot (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$ und mit dem Verfahren (2) erhält man bei

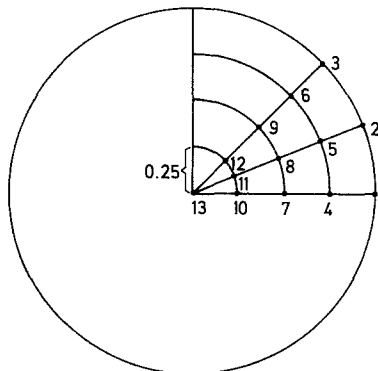


Abb. 2

äquidistanter Unterteilung in $N = 16, 32, 64$ Randstücke für die Approximation u_h in den gekennzeichneten Punkten die in Tab. 1 aufgeführten Ergebnisse.

Die numerischen Werte weisen genau die gemäß Kapitel 3 zu erwartenden Eigenschaften auf und belegen weiterhin, daß eine bessere Konvergenzordnung selbst im Falle eines kreisförmigen Gebietes nicht zu erwarten ist.

Tabelle 1

		$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	Konvergenz- ordnung
1	u_h $ u - u_h $	3.923879 7.612052 E-02	3.980762 1.923783 E-02	3.995184 4.815323 E-03	1.98
2	u_h $ u - u_h $	3.382683 3.244233 E-01	3.555570 1.553659 E-01	3.634393 7.271358 E-02	1.08
3	u_h $ u - u_h $	2.611731 3.882683 E-01	2.804905 1.950903 E-01	2.901982 9.801718 E-02	0.99
4	u_h $ u - u_h $	3.546275 1.622484 E-02	3.558884 3.615923 E-03	3.561597 9.031543 E-04	2.08
5	u_h $ u - u_h $	3.386275 1.147270 E-02	3.395191 2.556844 E-03	3.397109 6.386265 E-04	2.08
6	u_h $ u - u_h $	3.000000 3.188561 E-13	3.000000 5.169198 E-13	3.000000 1.392220 E-13	—
7	u_h $ u - u_h $	3.243616 6.384244 E-03	3.248397 1.603287 E-03	3.249599 4.014017 E-04	1.99
8	u_h $ u - u_h $	3.172262 4.514342 E-03	3.175643 1.603287 E-03	3.176493 4.014017 E-04	1.99
9	u_h $ u - u_h $	3.000000 3.974598 E-13	3.000000 6.294965 E-13	3.000000 1.365574 E-13	—
10	u_h $ u - u_h $	3.060906 1.594041 E-03	3.062099 4.008218 E-04	3.062400 1.003504 E-04	1.99
11	u_h $ u - u_h $	3.043067 1.127157 E-03	3.043911 2.834238 E-04	3.044123 7.095847 E-05	1.99
12	u_h $ u - u_h $	3.000000 4.953815 E-13	3.000000 7.740475 E-13	3.000000 1.467715 E-13	—
13	u_h $ u - u_h $	3.000000 3.108624 E-14	3.000000 3.175238 E-14	3.000000 3.508305 E-14	—

Literatur

- [1] Bohl, E.: Monotonie: Lösbarkeit und Numerik bei Operatorgleichungen. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1974.
- [2] Courant, R., Hilbert, D.: Methods of Mathematical Physics, Vol. 2. New York-London: Interscience Publishers 1962.
- [3] Gaier, D.: Konstruktive Methoden der konformen Abbildungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer 1964.
- [4] Jawson, M. A., Symm, G. T.: Integral Equation Method in Potentialtheory and Elastostatic. London-New York-San Francisco: Academic Press 1977.
- [5] Papamichael, N., Symm, G. T.: Numerical Techniques for Two-Dimensional Laplacian Problems. Computer Methods Appl. Mech. Engng. 6, 175—194 (1975).
- [6] Schauder, J.: Potentialtheoretische Untersuchungen, 1. Abhandlung. Math. Zeit. 33, 602 (1931).
- [7] Symm, G. T.: Integral Equation Method in Elasticity and Potential Theory. National Physical Laboratory Report Maths 51 (1964).
- [8] Symm, G. T.: Numerical Solutions of a Boundary Value Problem. National Physical Laboratory Report Maths 89 (1970).
- [9] Symm, G. T.: Treatment of Singularities in the Solutions of Laplace's Equation by an Integral Equation Method. National Physical Laboratory Report NAC 31 (1973).
- [10] Symm, G. T., Pitfield, R. A.: Solutions of Laplace's Equations in Two Dimensions. National Physical Laboratory Report NAC 44 (1974).
- [11] Varga, R. S.: Matrix Iterative Analysis. Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall 1962.

Dipl.-Math. Silke Stiller
Rechenzentrum
Universität Münster
Roxelstraße 60
D-4400 Münster
Bundesrepublik Deutschland