Über die Randwerte einer analytischen Funktion.

by Szegö, G.
in: Mathematische Annalen, (page(s) 232 - 244)
Berlin, Göttingen, Heidelberg; 1869

Über die Randwerte einer analytischen Funktion*).

Von

G. Szegö in Berlin.

Im Laufe meiner Untersuchungen über Toeplitzsche Formen[1]) gelangte ich zu einem Theorem, welches, mit einem wohlbekannten und vielfach gebrauchten Fatouschen Satze verbunden, einen neuen Beitrag liefert zum Verhalten der im Innern des Einheitskreises regulären analytischen Funktionen am Rande des Einheitskreises.

Fatou hat im Jahre 1906 folgenden Satz bewiesen[2]):

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

eine Potenzreihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 + \dots$$

konvergiert, die also für $|z| < 1$ *eine reguläre analytische Funktion darstellt. Dann existiert mit eventueller Ausnahme einer* 0-*Menge*[3]) *der Grenzwert*

$$\lim_{r=1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta}),$$

und die Funktion $|f(e^{i\theta})|^2$ *ist* (L)[4]) *integrabel. Es gelten ferner die Formeln*

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\, e^{-in\theta}\, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

---

*) Vgl. die vorläufige Mitteilung in den Sitzungsberichten der Berliner Math. Ges. **20** (1921), S. 20—22; ferner F. Riesz und G. Szegö, Analytikus függvények kerületi értékeiről. Vorgelegt der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 19. April 1920.

[1]) Vgl. G. Szegö, Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (Erste Mitteilung.) Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 167—202.

[2]) P. Fatou, Séries trigonométriques et séries de Taylor. Acta Mathematica **30** (1906), S. 335—400. Vgl. insbesondere S. 377—379.

[3]) D. h. mit Ausnahme einer Menge, deren Lebesguesches Maß gleich 0 ist.

[4]) D. h. im Lebesgueschen Sinne.

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

Die Natur der Randfunktion $f(e^{i\theta})$ wurde seitdem von mehreren Autoren untersucht[5]). Ich erwähne hier nur den folgenden Satz der Herren F. und M. Riesz[6]):

Die Randfunktion $f(e^{i\theta})$ nimmt jeden komplexen Wert nur auf einer 0-Menge an (natürlich abgesehen vom Fall $f(z) \equiv$ konst.).

Der Inhalt dieses Satzes ist vollständig äquivalent damit, daß (abgesehen vom Fall $f(z) \equiv 0$) die Randfunktion $f(e^{i\theta})$ nur auf einer 0-Menge verschwindet.

In der vorliegenden Arbeit beweise ich nun das folgende Theorem:

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

eine nicht identisch verschwindende Potenzreihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

konvergiert. Die nach dem Satz von Fatou notwendig existierende (bis auf eine 0-Menge bestimmte) Randfunktion $f(e^{i\theta})$ besitzt dann die Eigenschaft, daß die Funktion

$$\log |f(e^{i\theta})|$$

(L) integrabel ist.

Daraus folgt natürlich unmittelbar der Satz von F. und M. Riesz.

In § 1 beweise ich einen Satz, der als naturgemäße Erweiterung eines Fejérschen Satzes über trigonometrische Polynome zu betrachten ist. Darauf folgt als Anwendung in § 2 der Beweis des eben ausgesprochenen Theorems. § 3 enthält einige Bemerkungen zu den vorangehenden Untersuchungen.

---

[5]) Fatou hat bewiesen (a. a. O. [2]), S. 394–395), daß, wenn $f(z)$ für $|z| < 1$ beschränkt und nicht identisch gleich 0 ist, die Randfunktion $\lim\limits_{r=1} f(re^{i\theta}) = f(e^{i\theta})$ nicht auf einem ganzen Bogen $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ $(0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq 2\pi)$ oder gar auf einer maßgleichen Teilmenge desselben verschwinden kann; es ist sogar nicht möglich, daß sie daselbst nur endlich viele verschiedene Werte annehme. — Carathéodory hat mit anderen Mitteln bewiesen, daß $f(e^{i\theta})$ auf jedem Bogen des Einheitskreises *drei* verschiedene Werte annimmt. Vgl. Zur Ränderzuordnung bei konformer Abbildung (Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1913, S. 509–518) S. 517. — Vgl. noch W. Groß, Über die Singularitäten analytischer Funktionen (Monatsh. für Mathematik u. Physik 29 (1918), S. 3–47) S. 41.

[6]) F. u. M. Riesz, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. (Quatrième congrès des mathématiciens scandinaves à Stockholm 1916, S. 27–44.)

§ 1.

Über die positive Darstellung einer Klasse reeller Funktionen.

Herr Fejér hat folgendes Theorem bewiesen:

Jedes nichtnegative trigonometrische Polynom n-ter Ordnung

$$\varphi(\theta) = a_0 + 2\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \cos \nu\theta + b_\nu \sin \nu\theta)$$

läßt sich in der folgenden Form darstellen:

$$\varphi(\theta) = |g_0 + g_1 z + \ldots + g_n z^n|^2_{z=e^{i\theta}}\text{ [7]}.$$

Man kann diesen Satz auch in der folgenden Form aussprechen:

$$a_\nu + i b_\nu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = g_0 \bar{g}_\nu + g_1 \bar{g}_{\nu+1} + \cdots + g_{n-\nu}\bar{g}_n$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n;\ b_0 = 0)\text{ [8]},$$

und dann liefert er eine Parameterdarstellung für die Koeffizienten sämtlicher nichtnegativer trigonometrischer Polynome.

Ich will jetzt eine sich natürlich aufdrängende Erweiterung dieses Satzes behandeln. Zu diesem Zwecke führe ich folgende Ausdrucksweise ein:

Ich sage, daß eine im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ *definierte* (L) *integrable Funktion* $\varphi(\theta)$ *positiv dargestellt ist, wenn es eine Potenzreihe*

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

gibt, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 \ldots$$

konvergiert und

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{i\nu\theta} d\theta = a_0 \bar{a}_\nu + a_1 \bar{a}_{\nu+1} + \ldots + a_n \bar{a}_{\nu+n} + \cdots \tag{1}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist. In Zeichen:

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

(Diese Schreibweise ist berechtigt, denn im Falle, wo $f(z)$ für $|z| \leqq 1$ regulär und $\varphi(\theta) = |f(e^{i\theta})|^2$ ist, werden die Gleichungen (1) tatsächlich erfüllt.)

---

[7]) L. Fejér, Über trigonometrische Polynome. Journal für die reine und angewandte Mathematik **146** (1916), S. 53—82. Vgl. S. 54—62.

[8]) $\bar{g}$ bezeichnet die zu g konjugiert komplexe Größe.

Nun frage ich folgendes:

Was ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß eine für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierte (L) integrable Funktion $\varphi(\theta)$ im Sinne der Gleichungen (1) positiv darstellbar sei?

Bevor ich die obige Fragestellung allgemein beantworte, schicke ich die folgende Definition voraus:

Ich verstehe unter der Klasse (K) der im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierten (L) integrablen Funktionen diejenigen $\varphi(\theta)$, welche

a) *fast überall*[9]) *positiv sind,*

b) *für welche* $\log \varphi(\theta)$ (L) *integrabel ist.*

Mit Hilfe dieser Benennung kann ich das folgende Theorem aussprechen:

Damit die im Intervalle $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ definierte nicht identisch verschwindende Funktion $\varphi(\theta)$ positiv darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\varphi(\theta)$ zur Klasse (K) gehöre.

Die Gleichungen (1) liefern somit für die Fourierschen Konstanten der Funktionen der Klasse (K) ähnliche Parameterdarstellungen, wie Herr Fejér für trigonometrische Polynome gegeben hat[10]).

Ich bemerke, daß, wenn $\varphi(\theta)$ fast überall gleich 0 ist, $f(z) \equiv 0$ sein muß, weil ja in diesem Falle

$$0 = |a_0|^2 + |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2 + \ldots$$

ist. (Andererseits liefert dann $f(z) \equiv 0$ in der Tat eine positive Darstellung.) Diesen Fall können wir somit a priori ausschließen.

1. *Die Bedingung ist notwendig.* Es sei

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}};$$

man kann, ohne die Allgemeinheit einzuschränken, voraussetzen, daß $a_0 \neq 0$ ist. Wäre nämlich a_ν der erste nicht verschwindende Koeffizient, so hätte man offenbar

$$\varphi(\theta) \sim |a_\nu + a_{\nu+1} z + \ldots + a_{\nu+n} z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

Man sieht nun leicht ein, daß für alle Werte der Variablen $x_0, x_1, x_2, \ldots$ die Gleichung gilt:

$$(2) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2 \, d\theta = \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x_0 + a_{\nu-1} x_1 + \ldots + a_{\nu-n} x_n|^2$$

$$(z = e^{i\theta};\; a_{-n} = 0;\; n = 1, 2, 3, \ldots).$$

[9]) D. h. mit Ausnahme einer 0-Menge.

[10]) A. a. O. [7]), S. 62–64.

(Der Koeffizient von $x_p \bar{x}_q$ ist nämlich auf der linken Seite gleich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\, e^{i(p-q)\theta}\, d\theta$$

und auf der rechten Seite

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu-p}\, \bar{a}_{\nu-q}).$$

Die Hermiteschen Formen auf der linken Seite sind offenbar mit den zu $\varphi(\theta)$ gehörigen Toeplitzschen Formen identisch[11]); man hat ersichtlich

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \geqq 0 \qquad (z = e^{i\theta})$$

(sogar > 0, wenn die Variablen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ nicht durchweg verschwinden); die Funktion $\varphi(\theta)$ ist somit laut eines wohlbekannten und in der Theorie dieser Formen grundlegenden Satzes[12]) fast überall nichtnegativ.

Ich mache weiter von einem anderen Satze über Toeplitzsche Formen Gebrauch, den ich ganz allgemein zuerst in meiner Arbeit „Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen"[13]) bewiesen habe:

Es sei $\varphi(\theta)$ für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ nichtnegativ und (L) integrabel; ich bezeichne mit μ_n das Minimum der n-ten Toeplitzschen Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

unter der Nebenbedingung $x_0 = 1$. Dann existiert $\lim_{n=\infty} \mu_n = \mu \geqq 0$, und zwar hat man

$$\mu = \begin{cases} e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(\theta)\, d\theta}, & \textit{wenn } \varphi(\theta) \textit{ zur Klasse } (K) \textit{ gehört,} \\ 0, & \textit{im entgegengesetzten Falle.} \end{cases}$$

Wir brauchen also nichts anderes zu beweisen, als daß, sobald die Gleichungen (2) bestehen, der Grenzwert μ positiv sein muß. Nun folgt aus (2)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta)\,|x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \geqq |a_0 x_0|^2 \qquad (z = e^{i\theta}),$$

---

[11]) Vgl. etwa a. a. O. [1]), § 6.

[12]) O. Toeplitz, Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse 1910, S. 489—506, vgl. S. 504.

[13]) A. a. O. [1]), § 5.

also

$$\mu_n \geqq |a_0|^2$$

und

$$\mu \geqq |a_0|^2 > 0.$$

Daraus folgt, daß $\varphi(\theta)$ zur Klasse (K) gehört, w. z. b. w.

2. *Die Bedingung ist hinreichend.* Es sei $\varphi(\theta)$ eine Funktion der Klasse (K); dann ist die harmonische Funktion

$$g(\theta, r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(x) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}\, dx$$

für $r < 1$ regulär und man hat nach einem Satz von Fatou[14]) fast überall

$$\lim_{r=1} g(\theta, r) = \log \varphi(\theta).$$

Es sei $g(z)$ diejenige analytische Funktion, für welche $g(0)$ reell und

$$\Re\, g(re^{i\theta}) = g(\theta, r)\ ^{15})$$

ist; es sei ferner

$$D(z) = e^{\frac{g(z)}{2}} = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

d. h.

$$D(z) = e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(x) \frac{1+ze^{-ix}}{1-ze^{-ix}}\, dx}.$$

Letztere Funktion ist für $|z| < 1$ regulär und von 0 verschieden, ferner ist $D(0)$ reell und positiv. Man hat weiter

$$|D(re^{i\theta})|^2 = e^{g(\theta, r)},$$

also ist fast überall

$$\lim_{r=1} |D(re^{i\theta})|^2 = \varphi(\theta). \tag{3}$$

Ich behaupte nun, daß

$$\varphi(\theta) \sim |D(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist.

Zu diesem Zwecke beweise ich zunächst die Konvergenz von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ oder, was damit gleichbedeutend ist, die Beschränktheit von

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta$$

---

14) A. a. O. [2]).

15) $\Re a$ bezeichnet den reellen Teil von a.

für $r < 1$. Man hat nach einer bekannten Ungleichung von Jensen[16])

$$|D(re^{i\theta})|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\varphi(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx} \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-\theta)+r^2}dx,$$

also

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|D(re^{i\theta})|^2 d\theta \leqq \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(x)\,dx.$$

Es gilt andererseits mit Rücksicht auf (3) und auf einen wohlbekannten Hilfssatz von Fatou[17]) die Ungleichung

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta \leqq \liminf_{r=1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|D(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

d. h.

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,d\theta = \lim_{r=1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|D(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2.$$

Ich wende dieses Resultat auf die Funktion

$$\varphi^*(\theta) = \varphi(\theta)\,|1+\lambda z^\nu|^2_{z=e^{i\theta}}$$

an, wo $|\lambda| \leqq 1$, sonst aber beliebig, und $\nu > 0$ ist. Man erhält

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)|1+\lambda z^\nu|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n+\lambda a_{n-\nu}|^2$$

$$(z = e^{i\theta},\ a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-\nu} = 0),$$

woraus

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\theta)\,e^{i\nu\theta}\,d\theta = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\,\bar{a}_{\nu+n}$$

folgt[18]), w. z. b. w. — Damit ist unser Theorem bewiesen.

§ 2.

Ein Satz über die Randwerte einer analytischen Funktion.

Es sei

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

---

[16]) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes. Acta Mathematica 30 (1906), S. 175–193. Vgl. S. 187.

[17]) A. a. O. [2]), S. 375–376.

[18]) Ist nämlich $\Re\bar{\lambda}a = 0$ für alle $|\lambda| \leqq 1$, dann ist offenbar $a = 0$.

eine Potenzreihe, für welche

$$|a_0|^2 + |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 \dots$$

konvergent ist. Dann existiert nach Fatou fast überall

$$\lim_{r=1} f(r e^{i\theta}) = f(e^{i\theta}),$$

und die Funktion $|f(e^{i\theta})|^2$ ist (L) integrabel. Man hat ferner nach der Parsevalschen Formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\theta = a_0 \bar{a}_\nu + a_1 \bar{a}_{\nu+1} + \dots + a_n \bar{a}_{\nu+n} + \dots$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \dots)\ ^{19}).$$

Mit Hilfe der oben eingeführten Bezeichnung können wir aber dies auch in der folgenden Form schreiben:

$$|f(e^{i\theta})|^2 \sim |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

Im Sinne unseres obigen Resultates haben wir somit die Sätze:

Abgesehen vom Falle $f(z) \equiv 0$ *ist die Funktion* $|f(e^{i\theta})|^2$ *fast überall positiv und* $\log|f(e^{i\theta})|$ (L) *integrabel,* d. h. $|f(e^{i\theta})|^2$ *gehört zur Klasse* (K).

Ferner:

Abgesehen vom Falle $f(z) \equiv$ *konst. ist die Funktion* $|f(e^{i\theta}) - c|^2$ *fast überall positiv und* $\log|f(e^{i\theta}) - c|$ (L) *integrabel, falls* c *eine beliebige Konstante bezeichnet.*

Daraus folgt unter anderem, daß *die Randfunktion* $f(e^{i\theta})$ *einen gegebenen Wert* c *nur auf einer* 0-*Menge annehmen kann, insbesondere kann sie nur auf einer* 0-*Menge verschwinden,* das ist der Satz der Herren F. und M. Riesz.

§ 3.

Bemerkungen.

Das in § 1 untersuchte Problem möchte ich noch durch einige Bemerkungen über die *Eindeutigkeit* der positiven Darstellung einer Funktion $\varphi(\theta)$ der Klasse (K) ergänzen.

1. Es sei mit den früheren Bezeichnungen

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots|^2_{z=e^{i\theta}}.$$

---

[19]) A. a. O. [2]). Die Fouriersche Reihe von $f(e^{i\theta})$ stimmt nämlich mit der überein, die aus der Potenzreihe $f(z)$ durch die Substitution $z = e^{i\theta}$ formal entsteht.

Dann existiert nach Fatou fast überall

$$\lim_{r=1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} = F(\theta),$$

und es ist

$$|F(\theta)|^2 \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2.$$

D. h. man hat für alle n

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) e^{in\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |F(\theta)|^2 e^{in\theta} d\theta,$$

woraus bekanntlich (mit Ausnahme einer 0-Menge) $\varphi(\theta) = |F(\theta)|^2$ folgt. Daraus geht hervor, daß *die Äquivalenz*

$$\varphi(\theta) \sim |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}$$

damit völlig gleichwertig ist, daß die Reihensumme $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2$ *konvergiert, und fast überall die Gleichung*

$$\lim_{n=\infty} \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\theta} \right|^2 = \varphi(\theta)$$

besteht.

2. Ich habe in § 1 gezeigt, wie man zu einer gegebenen Funktion $\varphi(\theta)$ der Klasse (K) eine analytische Funktion $D(z)$ konstruiert, für welche

$$\varphi(\theta) \sim |D(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist. Ich frage nun: *Durch was für eine Eigenschaft ist die dort definierte Funktion $D(z)$ unter allen analytischen Funktionen $f(z)$ ausgezeichnet, für welche*

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist.

Es ist a priori klar, daß solche analytische Funktionen $f(z)$ (die überdies nicht von der Form $c\,D(z)$ sind, wo $|c| = 1$ ist) wirklich existieren; in der Tat ist z. B.

$$f(z) = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} D(z) \qquad (|z_0| < 1)$$

eine solche, da ja

$$\left| \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z} \right| = 1 \qquad (|z| = 1)$$

ist. (Daraus folgt nämlich einerseits die Beschränktheit von

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |D(re^{i\theta})|^2 d\theta,$$

andererseits die fast überall geltende Gleichung

$$\lim_{r=1} |f(r e^{i\theta})|^2 = \varphi(\theta),$$

was nach den obigen mit

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

gleichwertig ist.) Die Antwort auf die eben gestellte Frage lautet nun folgendermaßen:

Die in § 1 definierte analytische Funktion $D(z)$ liefert die dem absoluten Betrage nach größte analytische Funktion von der verlangten Eigenschaft, d. h. wenn

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist, dann hat man für $|z| < 1$

$$|f(z)| \leqq |D(z)|. \tag{4}$$

In Abschnitt 1 von § 1 habe ich nämlich bewiesen, daß, wenn

$$\varphi(\theta) \sim |f(z)|^2_{z=e^{i\theta}} \equiv |a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots|^2_{z=e^{i\theta}}$$

ist, mit den dort gebrauchten Bezeichnungen die Ungleichung

$$\mu_n \geqq |a_0|^2$$

besteht, also

$$\lim_{n=\infty} \mu_n = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(\theta)\, d\theta} \geqq |a_0|^2.$$

Nun ist nach Abschnitt 2 von § 1

$$|D(r e^{i\theta})|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(u) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(u-\theta)+r^2}\, du};$$

man hat somit

$$|D(0)|^2 = e^{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log \varphi(u)\, du},$$

d. h.

$$|D(0)| \geqq |f(0)|.$$

Es sei nun $\alpha = r e^{i\theta_0}$ eine beliebige, aber feste Stelle im Innern des Einheitskreises, d. h. $|\alpha| = r < 1$. Ich benütze die folgende allgemeinere Form des in Abschnitt 1 des § 1 angeführten Hilfssatzes:

Es sei $\varphi(\theta)$ (L) integrabel für $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ und $\mu_n(\alpha)$ bezeichne das Minimum der n-ten Toeplitzschen Form

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\theta) |x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n|^2\, d\theta \qquad (z = e^{i\theta})$$

unter der Nebenbedingung $x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha^n = 1$; *dann existiert* $\lim\limits_{n=\infty} \mu_n(\alpha) = \mu(\alpha) \geqq 0$ *und es ist*

$$\mu(\alpha) = \begin{cases} (1-r^2)\, e^{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\varphi(\theta) \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\theta_0)+r^2} d\theta}, & \textit{wenn } \varphi(\theta) \textit{ zur Klasse } (K) \textit{ gehört.} \\ 0, & \textit{im entgegengesetzten Falle}^{20)}, \end{cases}$$

Ich setze der Kürze halber bei festen, die Bedingung $x_0 + x_1\alpha + \ldots + x_n\alpha^n = 1$ erfüllenden $x_0, x_1, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} F(z) &= f(z)(x_0 + x_1 z + \ldots + x_n z^n) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu z^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu x_0 + a_{\nu-1} x_1 + \ldots + a_{\nu-n} x_n) z^\nu \end{aligned}$$

$$(a_{-1} = a_{-2} = \ldots = a_{-n} = 0),$$

dann ist

$$\begin{aligned} |F(\alpha)|^2 = |f(\alpha)|^2 &\leqq \sum_{\nu=0}^{\infty} |b_\nu|^2 \sum_{\nu=0}^{\infty} |\alpha|^{2\nu} \\ &= \frac{1}{1-r^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_\nu x_0 + a_{\nu-1} x_1 + \ldots + a_{\nu-n} x_n|^2, \end{aligned}$$

woraus nach Formel (2) des § 1

$$\mu_n(\alpha) \geqq (1-r^2)|f(\alpha)|^2$$

folgt. D. h.

$$\mu(\alpha) \geqq (1-r^2)|f(\alpha)|^2$$

und also

$$|D(\alpha)| \geqq |f(\alpha)|.$$

Damit ist die Ungleichung (4) bewiesen.

Wann kann in (4) für irgendein $z = \alpha$ ($|\alpha| < 1$) das Gleichheitszeichen gelten? Die Funktion

$$E(z) = \frac{f(z)}{D(z)}$$

ist offenbar regulär und dem absoluten Betrage nach kleiner als 1, wenn $|z| < 1$ ist. Man hat ferner fast überall

$$\lim_{r=1} |E(re^{i\theta})| = 1.$$

Es gilt also dasselbe von der Funktion

$$E^*(z) = E\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha} z}\right),$$

---

[20]) A. a. O. [1]) § 5.

da ja die Abbildung

$$z' = \frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha} z}$$

den Einheitskreis in sich überführt. Besteht also in der Ungleichung (4) für $z = \alpha$ das Gleichheitszeichen, so ist

$$E^*(z) = e_0 + e_1 z + \ldots + e_n z^n + \ldots$$

beschränkt für $|z| < 1$, ferner $|e_0| = 1$ und man hat mit Ausnahme einer 0-Menge

$$\lim_{r=1} |E^*(r e^{i\theta})| = 1.$$

Daraus folgt aber nach dem Parsevalschen Satze, daß

$$1 = |e_0|^2 + |e_1|^2 + \ldots + |e_n|^2 + \ldots,$$

d. h. $e_n = 0$ ist $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Daraus ergibt sich, daß

$$E^*(z) = \text{konst.} \quad \text{und folglich} \quad E(z) = \text{konst.}$$

sein muß, d. h. $f(z) = c\, D(z)$ $(|c| = 1)$. Schließen wir somit diesen Fall aus, so gilt in (4) für $|z| < 1$ immer das Zeichen $<$, d. h.

(4′) $$|f(z)| < |D(z)|.$$

Besonders bemerkenswert ist der Spezialfall $\varphi(\theta) = 1$. Dann lautet dieses Theorem folgendermaßen:

Es sei die analytische Funktion $f(z)$ *regulär für* $|z| < 1$ *und das Integral*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(r e^{i\theta})|^2 d\theta$$

sei beschränkt für $r < 1$; *ferner sei fast überall*

$$\lim_{r=1} |f(r e^{i\theta})| = 1.$$

Dann ist $|f(z)| \leqq 1$ *im Innern des Einheitskreises und die Gleichheit kann hier nur dann bestehen, wenn* $f(z) = c$ $(|c| = 1)$ *ist.*

Dieser Satz wurde von Herrn I. Schur in seiner inhaltsreichen Arbeit bewiesen: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung), (Journal für die reine und angewandte Mathematik **148** (1918), S. 122–145), S. 131–133.

3. Nachdem ich die Ergebnisse meiner Untersuchungen Herrn F. Riesz mitgeteilt habe, fügte er einige Bemerkungen und Ergänzungen hinzu, die ich hier mit seiner gütigen Erlaubnis kurz erwähnen will.

Zunächst gab er einen äußerst einfachen Beweis meines Theorems über die (L) Integrierbarkeit der Funktion $\log|f(e^{i\theta})|$, der völlig unabhängig ist von der Theorie der Toeplitzschen Formen und nur von gewissen elementaren Sätzen der Funktionentheorie und der Lebesgueschen Integraltheorie Gebrauch macht. Ferner zeigte er, daß ähnliche Sätze auch für die allgemeineren Funktionenklassen gelten, die sich durch die Beschränktheit der Integrale

$$\int_0^{2\pi} f(r e^{i\theta})|^p \, d\theta \qquad (r < 1),$$

wo $p > 0$ ist, charakterisieren lassen. Endlich gab er mit Benützung meiner Ungleichung (4) *sämtliche* analytische Funktionen an, die eine positive Darstellung für eine Funktion $\varphi(\theta)$ der Klasse (K) liefern.

(Eingegangen am 1. 2. 1921.)