

Article

## Beweis einer Formel für die Riemannsche Zetafunktion.

Siegel, Carl Ludwig

in: *Mathematica Scandinavica* - 14 | Periodical

4 page(s) (193 - 196)

---

### Nutzungsbedingungen

DigiZeitschriften e.V. gewährt ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht kommerziellen Gebrauch bestimmt. Das Copyright bleibt bei den Herausgebern oder sonstigen Rechteinhabern. Als Nutzer sind Sie nicht dazu berechtigt, eine Lizenz zu übertragen, zu transferieren oder an Dritte weiter zu geben.

Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen:

Sie müssen auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten; und Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgend einer Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen; es sei denn, es liegt Ihnen eine schriftliche Genehmigung von DigiZeitschriften e.V. und vom Herausgeber oder sonstigen Rechteinhaber vor.

Mit dem Gebrauch von DigiZeitschriften e.V. und der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

### Terms of use

DigiZeitschriften e.V. grants the non-exclusive, non-transferable, personal and restricted right of using this document. This document is intended for the personal, non-commercial use. The copyright belongs to the publisher or to other copyright holders. You do not have the right to transfer a licence or to give it to a third party.

Use does not represent a transfer of the copyright of this document, and the following restrictions apply:

You must abide by all notices of copyright or other legal protection for all copies taken from this document; and You may not change this document in any way, nor may you duplicate, exhibit, display, distribute or use this document for public or commercial reasons unless you have the written permission of DigiZeitschriften e.V. and the publisher or other copyright holders.

By using DigiZeitschriften e.V. and this document you agree to the conditions of use.

### Kontakt / Contact

DigiZeitschriften e.V.

Papendiek 14

37073 Goettingen

Email: [digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de](mailto:digizeitschriften@sub.uni-goettingen.de)

BEWEIS EINER FORMEL  
FÜR DIE RIEMANNSCHE ZETA-FUNKTION

CARL LUDWIG SIEGEL

In einer brieflichen Mitteilung an Viggo Brun habe ich vor Jahren einen Beweis gegeben für eine Formel, die er mir vorgelegt hatte. Dies ist in der Abhandlung: »La somme des facteurs de Möbius« par Viggo Brun [1] erwähnt. Da dieser Beweis nie gedruckt worden ist, hat mir Brun vorgeschlagen, denselben zu veröffentlichen. In der erwähnten Abhandlung heisst es:

»Pour éclaircir les relations entre la fonction zéta et les nombres de Bernoulli on peut étudier l'équivalence connue suivante qui est une conséquence de la formule d'Euler–Maclaurin

$$(s-1)\zeta(s) \sim 1 + \frac{1}{2}(s-1) + \frac{B_2}{2!}(s-1)s + \frac{B_4}{4!}(s-1)s(s+1)(s+2) + \dots$$

où la série à droite est divergente (ou finie).

Étudions les sommes successives

$$Q_1(s) = 1 + \frac{1}{2}(s-1) = \frac{1}{2}(s+1)$$

$$Q_2(s) = 1 + \frac{1}{2}(s-1) + \frac{B_2}{2!}(s-1)s = \frac{1}{12}(s+2)(s+3)$$

$$Q_4(s) = \dots = -\frac{1}{720}(s+2)(s+4)(s+5)(s-9)$$

$$Q_6(s) = \dots = \frac{1}{30240}(s+2)(s+4)(s+6)(s+7)[s^2 - 10s + 45].$$

Dans une correspondance entre M.M. A. Selberg, E. Jacobsthal, C. Siegel [2] et moi j'ai fait la supposition que

$$Q_{2r}(s) = \frac{B_{2r}}{(2r)!} (s+2)(s+4)\dots(s+2r)(s+2r+1)[s^{r-1} + (r^2 - 6r - 1)s^{r-3} + \dots].$$

M. Siegel en a donné une démonstration. Comme on voit les zéros « triviales » ( $-2, -4, -6, \dots$ ) de la fonction zéta figurent ici. On peut se poser la question: Les racines complexes de  $Q_r(s)$  s'approchent-elles vers les zéros de la fonction zéta quand  $r$  augmente?

Eingegangen am 11. November 1963.

M. Siegel en a donné une réponse négative. Cela se peut naturellement expliquer par la divergence de la série.

J'ai essayé — en donnant à la formule d'Euler-Maclaurin une autre forme — d'obtenir une somme convergente pour  $(s-1)\zeta(s)$ :

$$\begin{aligned}
 (s-1)\zeta(s) &= Q_{2r-2}(s) + \frac{B_{2r}}{(2r)!} (s-1)s(s+1)\dots(s+2r-1)[\zeta(s+2r)-1] + \\
 &+ \frac{1}{2!} \frac{B_{2r}}{(2r)!} (s-1)s(s+1)\dots(s+2r)[\zeta(s+2r+1)-1] + \\
 &+ \left\{ \frac{1}{3!} \frac{B_{2r}}{(2r)!} + \frac{1}{1!} \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} \right\} (s-1)s\dots(s+2r+1)[\zeta(s+2r+2)-1] + \\
 &+ \left\{ \frac{1}{4!} \frac{B_{2r}}{(2r)!} + \frac{1}{2!} \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} \right\} (s-1)s\dots(s+2r+2)[\zeta(s+2r+3)-1] + \\
 &+ \left\{ \frac{1}{5!} \frac{B_{2r}}{(2r)!} + \frac{1}{3!} \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} + \frac{1}{1!} \frac{B_{2r+4}}{(2r+4)!} \right\} (s-1)s\dots(s+2r+3)[\zeta(s+2r+4)-1] + \\
 &+ \left\{ \frac{1}{6!} \frac{B_{2r}}{(2r)!} + \frac{1}{4!} \frac{B_{2r+2}}{(2r+2)!} + \frac{1}{2!} \frac{B_{2r+4}}{(2r+4)!} \right\} (s-1)s\dots(s+2r+4)[\zeta(s+2r+5)-1] + \\
 &+ \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

J'ai mentionné cette formule dans une lettre à M. Siegel en disant que je croyais que la série soit convergente, au moins pour  $s$  réel et  $> 1$ . Dans une lettre de 15 juin 1946 M. Siegel a démontré la convergence de cette série pour toutes valeurs de  $s$ , réelles et complexes. Il a également démontré la justesse de cette formule. En réitérant la formule on peut obtenir des polynômes qui probablement sont plus analogues à la fonction zéta que les polynômes mentionnés plus haut.»

Mein Beweis war:

Ist  $\varrho$  beliebig und  $|y| < 1$ , so gilt die binomische Reihenentwicklung

$$(1-y)^\varrho = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n-\varrho-1}{n} y^n.$$

Man substituere

$$\varrho = 1-s, \quad y = x^{-1}$$

und multipliziere mit  $x^{1-s}$ ; dies liefert

$$(x-1)^{1-s} - x^{1-s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} x^{-n-s}$$

für  $x > 1$ . Ist auch  $s > 1$ , so sind rechts alle Glieder positiv. Summiert man über  $x = 2, 3, 4, \dots$ , so erhält man links eine konvergente Reihe mit der Summe 1, und rechts ist die Vertauschung der Summationsfolge erlaubt.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(1) \quad \zeta(s) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-s} = \eta(s),$$

so wird

$$(2) \quad 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s),$$

zunächst für  $s > 1$ . Weiterhin sei  $s = \sigma + it$  beliebig. Ist dann  $n > 1 - \sigma$ , so ist  $\eta(n+s)$  durch die Reihe in (1) erklärt und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{2^{n+s} \eta(n+s)\} = 1.$$

Definiert man

$$\binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s) = a_n(s) = a_n,$$

so ist also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n / a_{n+1} = 2.$$

Man zeigt leicht, dass dies sogar gleichmässig bezüglich  $s$  in jedem beschränkten Gebiet der  $s$ -Ebene gilt. Hieraus ersieht man die absolute und gleichmässige Konvergenz der Reihe in (2), für jedes solche Gebiet. Die Funktionalgleichung (2) liefert jetzt die analytische Fortsetzung von  $(s-1)\zeta(s)$  in die ganze  $s$ -Ebene, und (2) gilt überall.

Man ersetze  $s$  in (2) durch  $k+s$  für  $k=0, 1, 2, \dots, h$ , multipliziere mit

$$\binom{k+s-2}{k} B_k$$

und summiere über  $k$ . Dies ergibt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^h \binom{k+s-2}{k} B_k &= \sum_{k=0}^h \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k+s-1}{n+k+1} \binom{n+k+1}{k} B_k \eta(n+k+s) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s) \sum_{k=0}^{\min(n,h)} \binom{n+1}{k} B_k \\ &= (s-1)\eta(s) - \sum_{n=h+1}^{\infty} \binom{n+s-1}{n+1} \eta(n+s) \sum_{k=h+1}^n \binom{n+1}{k} B_k \end{aligned}$$

für jedes  $h=0, 1, 2, \dots$ . Dies ist Ihre Formel.

Die unendliche Reihe konvergiert, weil man endlich viele absolut konvergente Reihen addiert und umgeordnet hat.

Ich glaube, dass (2) schon irgendwo in der Literatur steht, aber ich weiss nicht wo.

## LITERATUR

1. Viggo Brun, *La somme des facteurs de Möbius*, Dixième congrès des mathématiciens scandinaves, Copenhague, 1946, 40–53.
2. V. Brun, E. Jacobsthal, A. Selberg, C. Siegel, *En brevveksling om et polynom som er i slekt med Riemanns zetafunktion*, Norsk matematisk tidsskrift 28 (1946), 65–71.

UNIVERSITÄT GÖTTINGEN, DEUTSCHLAND