Über die Randwerte einer analytischen Funktion.

Von

Friedrich Riesz in Szeged.

Einleitung.

Es sei $f(z)$ eine innerhalb des Einheitskreises regulär analytische Funktion; δ sei eine positive Zahl. Der Mittelwert

$$\mu_\delta(r) = \mu_\delta(f; r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^\delta \, d\theta \qquad (r < 1)$$

ist, laut einem Satze von Herrn Hardy, eine wachsende Funktion von r[1]) und es bestehen daher die folgenden beiden Möglichkeiten: entweder wächst $\mu_\delta(r)$ für $r \to 1$ ins Unendliche, oder aber ist $\mu_\delta(r)$ beschränkt und strebt dann für $r \to 1$ gegen einen Grenzwert $\mu_\delta^* = \mu_\delta^*(f)$. Im letzteren Falle wollen wir sagen, die Funktion $f(z)$ gehöre zur Klasse H_δ. Aus der bekannten Verallgemeinerung der Schwarzschen Ungleichung oder auch aus der für jedes positive x bestehenden Ungleichung

$$x^{\delta'} < 1 + x^\delta \qquad (0 < \delta' < \delta)$$

folgt, daß sobald $\delta' < \delta$, die Klasse $H_{\delta'}$ die Klasse H_δ enthält. Die beschränkten Funktionen sind in sämtlichen Klassen H_δ enthalten.

Im § 1 der vorliegenden Arbeit beweise ich den folgenden

Satz I (Zerlegungssatz). *Für jede Funktion $f(z)$ der Klasse H_δ gibt es eine Zerlegung in zwei Faktoren: $f(z) = g(z)\,h(z)$ derart, daß $h(z)$ für $|z| < 1$ regulär und beschränkt ist, während $g(z)$ der Klasse H_δ angehört und für $|z| < 1$ nirgends verschwindet.*

Durch diese Zerlegung läßt sich die Untersuchung der Randwerte der Funktionen der Klasse H_δ auf den prägnantesten Fall $\delta = 2$ zurück-

---

[1]) G. H. Hardy: On the mean value of the modulus of an analytic function, Proceedings of the London Math. Soc., ser. 2, 14 (1915), S. 269–277.

führen. In den §§ 2 bis 4 werde ich auf diese Art bekannte und neue Resultate herleiten.

Den Satz I habe ich gelegentlich eines Briefwechsels mit Herrn G. Szegö bewiesen. Die ersten beiden Briefe, ein Brief von Szegö (19. 3. 1920) und meine Antwort (31. 3. 1920) habe ich der Ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt (19. 4. 1920), in deren Berichten sie auch in ungarischer Sprache erschienen sind[2]). Mein Brief enthält den Beweis des Satzes für den Fall $\delta = 1$. Den Fall eines beliebigen $\delta > 0$ habe ich in einem weiteren Briefe (7. 5. 1920) behandelt; der vollständige Briefwechsel — je 2 Briefe — hat in deutscher Übersetzung der Redaktion der Mathematischen Annalen vorgelegen, wurde aber aus redaktionellen Gründen durch Herrn Szegö in eine einzige Arbeit umgeformt[3]), wobei mein Anteil auf mein Verlangen nicht in extenso aufgenommen, sondern nur mit einigen Worten angedeutet wurde.

Der dem Satze I analoge Satz für den Fall einer beschränkten Funktion ist in einer Arbeit von Herrn Blaschke implizit enthalten[4]).

§ 1.

Beweis des Zerlegungssatzes.

Verschwindet $f(z)$ für $|z| < 1$ nicht, so liefert $g(z) = f(z)$, $h(z) = 1$ die gewünschte Zerlegung. Sonst seien $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ die innerhalb des Einheitskreises gelegenen Nullstellen von $f(z)$, wobei mehrfache Nullstellen entsprechend oft angeführt sind. Nehmen wir zunächst an, daß $f(0) \neq 0$. Wir setzen

$$h_n(z) = \prod_{k=1}^{n} |\alpha_k| \frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \bar{\alpha}_k z}, \quad g_n(z) = \frac{f(z)}{h_n(z)}.$$

Die Funktionen $h_n(z)$ und $g_n(z)$ sind innerhalb des Einheitskreises regulär. Auf dem Kreise selbst ist bekanntlich $|h_n(z)| = 1$; also ist für jedes bestimmte n und für jedes positive ε

$$|h_n(re^{i\theta})| \geqq 1 - \varepsilon,$$

sobald r genügend nahe an 1 liegt. Folglich ist auch

$$\mu_\delta(g_n; r) \leqq (1-\varepsilon)^{-\delta} \mu_\delta(f; r) \leqq (1-\varepsilon)^{-\delta} \mu_\delta^*(f),$$

[2]) G. Szegö und F. Riesz: Analytikus függvény kerületi értékeiről, Math. és term. értesitő 38 (1920), S. 113–127.

[3]) G. Szegö: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Math. Annalen 84 (1921), S. 232–244.

[4]) W. Blaschke: Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen, Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, 67 (1915), S. 194–200.

wo $\mu_\delta^*(f)$ die obere Schranke der Mittelwerte $\mu_\delta(f; r)$ bedeutet und r genügend nahe an 1 liegt. Nach dem Hardyschen Satze ist dann a fortiori für jedes $r < 1$

$$\mu_\delta(g_n; r) \leqq (1-\varepsilon)^{-\delta} \mu_\delta^*(f)$$

und da der linksstehende Mittelwert nicht von ε abhängt, so ist auch

$$(1) \qquad \mu_\delta(g_n; r) \leqq \mu_\delta^*(f).$$

Im Falle einer endlichen Anzahl von Nullstellen: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ hat man hiermit schon die gewünschte Zerlegung, nämlich $f(z) = g_n(z) h_n(z)$. Im Falle unendlich vieler Nullstellen ist nach (1)

$$|g_n(0)|^\delta = \mu_\delta(g_n; 0) \leqq \mu_\delta^*(f);$$

andererseits ist

$$g_n(0) = \frac{f(0)}{h_n(0)} = \frac{f(0)}{|\alpha_1 \ldots \alpha_n|},$$

also folgt

$$|\alpha_1 \ldots \alpha_n| \geqq |f(0)| \{\mu_\delta^*(f)\}^{-\frac{1}{\delta}}$$

für jedes n und damit die unbedingte Konvergenz des unendlichen Produktes $\Pi |\alpha_k|$.[5]) Nach Herrn Blaschke ist dann auch das unendliche Produkt

$$h(z) = \lim_{n=\infty} h_n(z) = \prod_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| \frac{1 - \frac{z}{\alpha_k}}{1 - \bar{\alpha}_k z}$$

für $|z| < 1$ unbedingt und auf jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$ gleichmäßig konvergent[6]); die Funktion $h(z)$ ist regulär und es ist $|h(z)| \leqq 1$. Die Funktion $h(z)$ hat genau dieselben Nullstellen wie $f(z)$, also ist für $|z| < 1$ die Funktion

$$g(z) = \frac{f(z)}{h(z)}$$

regulär und von Null verschieden. Ferner konvergieren die Funktionen $g_n(z)$ gegen $g(z)$ und zwar gleichmäßig auf jedem Kreise $|z| \leqq r < 1$; also folgt auf Grund von (1), daß auch

$$(2) \qquad \mu_\delta(g; r) \leqq \mu_\delta^*(f).$$

Damit ist unser Satz bis auf die einschränkende Annahme $f(0) \neq 0$

[5]) Dasselbe folgt auch aus der sogenannten Jensenschen Formel; vgl. P. Fatou: Sur l'évanouissement d'une branche de fonction uniforme aux points d'une ligne singulière, Bulletin des sciences math., mars 1921.

[6]) Blaschke, l. c. [4]); vgl. auch E. Landau: Über die Blaschkesche Erweiterung des Vitalischen Satzes, Berichte d. sächs. Ges. d. Wiss., Math.-phys. Klasse, 70 (1918), S. 156–159.

bewiesen. Ist nun $f(0)=0$, so setzen wir $f(z)=z^m f_1(z)$, wo $f_1(z)$ für $z=0$ regulär nnd $\neq 0$ ist. Dann ist

$$\mu_\delta(f_1; r) = r^{-m\delta}\mu_\delta(f; r) \to \mu_\delta^*(f) \qquad (r\to 1);$$

daraus folgt $\mu_\delta^*(f_1)=\mu_\delta^*(f)$ und speziell, daß auch $f_1(z)$ der Klasse H_δ angehört. Die Faktorenzerlegung $f_1(z)=g(z)h(z)$ ergibt dann für $f(z)$ die Zerlegung in $g(z)$ und $z^m h(z)$.

Es sei noch bemerkt, daß in jener Verallgemeinerung des Hardyschen Satzes, den ich vor kurzem mitteilte[7]), als Spezialfall auch das Anwachsen der Mittelwerte des positiven Teiles von $\log|f(z)|$, d. h. der Funktion von r

$$h(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|f|>1} \log|f(re^{i\theta})|\,d\theta$$

enthalten ist. Daraus folgt ebenso, wie Satz I, der analoge Satz *für die, sämtliche Klassen H_δ umfassende Klasse jener Funktionen, für welche der letztgenannte Mittelwert beschränkt ist.*

§ 2.

Existenz der Randwerte.

Es werde nun die Funktion $f(z)$ der Klasse H_δ dem Satze I entsprechend in die Faktoren $g(z)$ und $h(z)$ zerlegt. Da $g(z)$ im Einheitskreise nirgends verschwindet, so läßt sich daselbst eine eindeutige Bestimmung $\gamma(z)$ von $\{g(z)\}^{\frac{\delta}{2}}$ festlegen. Die Funktion $\gamma(z)$ gehört dann zur Klasse H_2; die Funktion $h(z)$ ist beschränkt und gehört somit jedenfalls zur Klasse H_2.

Setzen wir

$$\gamma(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

dann erhält man für den entsprechenden Mittelwert auf Grund der Parsevalschen Formel[8])

$$\mu_2(\gamma; r) = |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + |a_2|^2 r^4 + \dots$$

und aus der Beschränktheit von $\mu_2(\gamma; r)$ folgt somit die Konvergenz der Reihe $\Sigma|a_k|^2$. Nach dem sogenannten Riesz-Fischerschen Satze gibt

[7]) F. Riesz: Sur les valeurs moyennes du module des fonctions harmoniques et des fonctions analytiques, Acta univers. hung. Francisco-Jos. 1 (1922), S. 27–32.

Zur Zeit des in der Einleitung erwähnten Briefwechsels besaß ich diese Verallgemeinerung noch nicht und konnte auch den Zerlegungssatz für den logarithmischen Fall nicht beweisen. Meine Aufmerksamkeit wurde vor kurzem durch Herrn A. Ostrowski wieder auf diesen Fall gelenkt.

[8]) Anstatt der Parsevalschen Formel genügt hier auch die Besselsche Ungleichung.

es daher eine nebst dem Quadrate ihres absoluten Betrages integrierbare Funktion $\gamma(e^{i\theta})$, deren formal gebildete Fouriersche Entwicklung, nach den Potenzen von $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ geordnet, für $z = e^{i\theta}$ mit der obigen Potenzreihe übereinstimmt[9]). Die so definierte Funktion $\gamma(e^{i\theta})$ ist nach Lebesgue fast überall gleich dem Differentialquotienten ihres Integrals[10]) und daher nach Fatou zugleich Randwert der Funktion $\gamma(z)$,[11]) und zwar bei Annäherung innerhalb eines beliebigen Sehnenwinkels, also speziell Grenzwert, für $r \to 1$, der Funktion $\gamma(re^{i\theta})$. Aus demselben Grunde existiert auch fast überall der Randwert von $h(z)$ und somit auch fast überall der Randwert $f(e^{i\theta})$ von $f(z)$. Es besteht also der

Satz II. *Jede Funktion $f(z)$, die einer Klasse H_δ angehört, besitzt, bei radialer Annäherung an den Einheitskreis, fast überall Randwerte.*

Für $\delta < 1$ ist dieser Satz meines Wissens neu. Für $\delta \geqq 1$ folgt er bekanntlich auch aus der Tatsache, daß die Integralfunktion eine Randfunktion von beschränkter Schwankung besitzt; für $\delta < 1$ ist dies aber nicht mehr notwendig der Fall.

§ 3.

Der Szegösche Satz.

Herr Szegö hat für den Fall $\delta = 2$ und $f(z) \not\equiv 0$ die Integrierbarkeit von $\log|f(e^{i\theta})|$ bewiesen[12]); in diesem Resultat ist speziell auch die Tatsache enthalten, daß *die Randwerte nur auf einer Nullmenge verschwinden können*[13]). Obzwar diese Sätze, wie Herr Fatou für den Nullmengensatz gezeigt hat[14]) und wie ich es für den Szegöschen Satz an anderer Stelle ausführe[15]), *auch im allgemeinen Falle $\delta > 0$* fast unmittelbar aus der Jensenschen Formel folgen, so darf ich hier vielleicht doch bemerken, daß gerade diese Entdeckung von Szegö uns den Anlaß zu dem in der Einleitung angeführten Briefwechsel und speziell mir zur Aufstellung von Satz I gab. Durch diesen Zerlegungssatz wird nämlich

---

9) F. Riesz: Sur les systèmes orthogonaux de fonctions, Comptes rendus **144** (1907), S. 615–619; E. Fischer: Sur la convergence en moyenne, ebenda S. 1022–1024.

10) H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris 1904, S. 124.

11) P. Fatou: Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math. **30** (1906), S. 335–400, insbes. 348 u. 357.

12) Szegö, l. c. 2) 3).

13) F. u. M. Riesz: Über die Randwerte einer analytischen Funktion, Compte rendu du quatrième congrès des math. scandinaves à Stockholm (1916), S. 27–44, insbes. S. 32.

14) Fatou, l. c. 5).

15) F. Riesz: Sur les suites de fonctions analytiques, erscheint in Acta Univers. hung. Francisco-Jos. **1** (1922), Fasc. 2; vgl. auch l. c. 2) u. 3).

auch hier der allgemeine Fall auf den Spezialfall $\delta = 2$ zurückgeführt, da ja $\log|f(e^{i\theta})| = \frac{2}{\delta}\log|\gamma(e^{i\theta})| + \log|h(e^{i\theta})|$ ist und die Funktionen γ und h in der Klasse H_2 enthalten sind.

§ 4.

Starke Konvergenz und Anwendungen.

Nach der Parsevalschen Formel ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\gamma(e^{i\theta}) - \gamma(re^{i\theta})|^2 d\theta = \sum_{k=1}^{\infty}|a_k|^2(1-r^k)^2;$$

diese Summe und somit auch das linksstehende Integral streben, für $r \to 1$, gegen Null, d. h. die Funktion $\gamma(re^{i\theta})$ konvergiert nicht nur in gewöhnlichem Sinne fast überall gegen $\gamma(e^{i\theta})$, sondern auch dem Mittelwerte nach („en moyenne"), oder anders ausgedrückt, stark in bezug auf den Exponenten 2 [16]. Es soll nun gezeigt werden, daß auch allgemein $f(re^{i\theta})$ stark gegen die Randfunktion $f(e^{i\theta})$ konvergiert und zwar in bezug auf den Exponenten δ, [17] d. h. es soll die Limesgleichung

$$\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta}) - f(re^{i\theta})|^{\delta} d\theta \to 0 \qquad (r \to 1) \tag{3}$$

bewiesen werden. Es genügt offenbar, diese Limesgleichung für jede beliebige Folge $r_n \to 1$ zu beweisen.

Wir leiten zunächst aus der Zerlegung $f = gh = \gamma^{\frac{2}{\delta}}h$ die scheinbar weniger aussagende Limesgleichung

$$\int_M |f(r_n e^{i\theta})|^{\delta} d\theta \to \int_M |f(e^{i\theta})|^{\delta} d\theta \tag{4}$$

ab, wo M eine beliebige meßbare Menge von θ-Werten $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ bedeutet. Für die Differenz D der beiden Integrale ist, wenn wir die kürzere Schreibweise

$$h_n = h(r_n e^{i\theta}), \quad h = h(e^{i\theta}), \quad \gamma_n = \gamma(r_n e^{i\theta}), \quad \gamma = \gamma(e^{i\theta})$$

einführen,

$$\begin{aligned} D &= \int_M \{|h|^{\delta}|\gamma|^2 - |h_n|^{\delta}|\gamma_n|^2\} d\theta \\ &= \int_M \{|h|^{\delta} - |h_n|^{\delta}\}|\gamma|^2 d\theta - \int_M |h_n|^{\delta}\{|\gamma|^2 - |\gamma_n|^2\} d\theta; \end{aligned}$$

---

[16] Vgl. Fischer, l. c. [9]; F. Riesz: a) Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes rendus 148 (1909), S. 1303—1305, b) Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen, Math. Annalen 69 (1910), S. 449—497, insbes. S. 464.

[17] Vgl. Riesz, l. c. [16].

gelingt es uns zu zeigen, daß die beiden rechtsstehenden Integrale gegen 0 streben, so ist damit (4) bewiesen. Es sei $|h(re^{i\theta})| \leqq 1$, was wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, und was übrigens für die in § 1 benützte Blaschkesche Funktion tatsächlich der Fall ist, so ist der Integrand im ersten Integral dem absoluten Betrage nach $\leqq |\gamma|^2$, also $\leqq$ einer integrierbaren Funktion und strebt wegen $h_n \to h$ fast überall gegen Null; somit strebt nach Lebesgue auch das Integral gegen Null[18]). Der Integrand im zweiten Integral ist dem absoluten Betrage nach $\leqq \big||\gamma|^2 - |\gamma_n|^2\big| \leqq |\gamma^2 - \gamma_n^2| = |\gamma - \gamma_n|\,|\gamma + \gamma_n|$; also ist auf Grund der Schwarzschen Ungleichung und zufolge (2) das Quadrat des Integrals

$$\leqq \int_M |\gamma - \gamma_n|^2 d\theta \int_M |\gamma + \gamma_n|^2 d\theta \leqq 4\mu_\delta^*(f) \int_M |\gamma - \gamma_n|^2 d\theta \to 0.$$

Damit ist die Limesgleichung (4) bewiesen. Um daraus (3) zu erhalten, machen wir vom bekannten Satze des Herrn Egoroff Gebrauch[19]). Da nämlich die Funktionen $f_n = f(r_n e^{i\theta})$ fast überall gegen $f = f(e^{i\theta})$ konvergieren, so gibt es nach diesem Satze Mengen M von beliebig kleinem Inhaltsmaße derart, daß auf der Komplementärmenge die Konvergenz eine gleichmäßige ist. Da ferner das Integral der integrierbaren Funktion $|f|^\delta$ auf genügend kleinen Mengen M beliebig klein wird, so können wir, wenn irgendeine beliebig kleine positive Zahl ε vorliegt, die Menge M des Egoroffschen Satzes so gewählt denken, daß

$$\int_M |f|^\delta d\theta < \varepsilon$$

ausfällt. Wegen (4) ist dann auch für genügend große n

$$\int_M |f_n|^\delta d\theta < \varepsilon$$

und damit (da $|a+b|^\delta \leqq 2^\delta(|a|^\delta + |b|^\delta)$ ist)

$$\int_M |f - f_n|^\delta d\theta < 2^{\delta+1}\varepsilon.$$

Das entsprechende Integral auf der Komplementärmenge wird — zufolge der gleichmäßigen Konvergenz — für große n beliebig klein, z. B. $< \varepsilon$, also wird für genügend große n das gesamte Integral $< 2^{\delta+1}\varepsilon + \varepsilon$, d. i. beliebig klein. Damit ist die Limesgleichung (3) bewiesen. Wir haben also den

Satz III. *Die Funktion $f(z) = f(re^{i\theta})$ der Klasse H_δ konvergiert in bezug auf den Exponenten δ stark gegen ihre Randfunktion.*

---

[18]) H. Lebesgue: Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm, Bulletin de la soc. math. de France **36** (1908), S. 3—19, insbes. S. 11.

[19]) D. Th. Egoroff: Sur les suites de fonctions mesurables, Comptes rendus **152** (1911), S. 244—246.

Die Ausführungen dieses Paragraphen ergeben noch nebenbei folgende Resultate:

a) Aus (4) folgt, indem man $M=(0, 2\pi)$ setzt, der *stetige Anschluß der Hardyschen Mittelwerte für* $r \to 1$.

b) Wendet man dies auf die Funktionen f und g in § 1 an, so folgt auf Grund der Ungleichung (2):

$$\int_0^{2\pi} |g(e^{i\theta})|^\delta d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f(e^{i\theta})|^\delta d\theta.$$

Wegen $|h(z)| \leqq 1$, also $|g(z)| \geqq |f(z)|$ kann in dieser Integralungleichung nur das Gleichheitszeichen gelten und es muß fast überall $|g(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$ sein. Dies ist gleichbedeutend mit der auch auf direktem Wege leicht beweisbaren Eigenschaft der Blaschkeschen Funktion $h(z)$, daß *ihre Randwerte dem absoluten Betrage nach fast überall gleich* 1 *sind*[20]).

c) Aus (3) folgt leicht das Bestehen der Cauchyschen Integralformeln bei Integration längs des Randes, sobald nur $\delta \geqq 1$ ist, also unter der allgemeinsten Bedingung, denn für $\delta < 1$ haben ja die entsprechenden Integrale im allgemeinen keinen Sinn.

Dasselbe gilt von der Poissonschen Integralformel. Aus dieser aber ergibt sich durch Anwendung des ersten Mittelwertsatzes sofort der folgende Satz, jedenfalls zunächst nur für $\delta \geqq 1$:

Sind die Randwerte einer Funktion $f(z)$ der Klasse H_δ dem absoluten Betrage nach fast überall $\leqq 1$, so ist auch überall im Einheitskreise $|f(z)| \leqq 1$.

Für den Fall $\delta = 2$ ist dieser Satz durch Herrn I. Schur aufgestellt und bewiesen worden[21]). Der Fall eines beliebigen $\delta > 0$, also auch der zunächst ausgeschlossene Fall $\delta < 1$, läßt sich durch die Zerlegung $f = \gamma^{\frac{2}{\delta}} h$ ($|h(z)| \leqq 1$, $|h(e^{i\theta})|$ fast überall gleich 1) auf den Spezialfall $\delta = 2$ zurückführen, da nämlich die Voraussetzungen des Satzes auch für $\gamma(z)$ erfüllt sind.

d) Die Limesgleichung (3) ist bekanntlich gleichwertig mit der folgenden, in welcher die Randwerte nicht mehr vorkommen:

$$(3') \qquad \int_0^{2\pi} |f(r_m e^{i\theta}) - f(r_n e^{i\theta})|^\delta d\theta \to 0 \qquad (r_m \to 1,\ r_n \to 1).$$ [22])

---

[20]) Ich habe diese Eigenschaft von $h(z)$ im zweiten der in Einleitung erwähnten Briefe an Herrn Szegö angegeben, laut einer brieflichen Mitteilung ist sie unabhängig auch von Herrn Fatou bemerkt worden.

[21]) I. Schur: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung), Journal für r. u. a. Math. **148** (1918), S. 122—145, insbes. 131—133.

[22]) Vgl. für $\delta = 2$: Fischer, l. c. [9]); für beliebiges $\delta > 0$; Riesz, l. c. [16a]).

Wir wollen diese Bemerkung auf den folgenden Fall anwenden: Sei $F(z)$ eine für $|z| < 1$ analytisch reguläre Funktion, für welche die Totalschwankung $T(r)$ längs der Kreise $|z| = r < 1$ für $r \to 1$ beschränkt bleibt. Da $T(r) = 2\pi\ \mu_1(f; r)$, wo $f(z) = zF'(z)$ ist, so gehören $f(z)$ und auch der Differentialquotient $F'(z)$ zur Klasse H_1 und die Gleichung (3′) besagt für diesen Fall, daß die Totalschwankung von $F(r_m e^{i\theta}) - F(r_n e^{i\theta})$ für $r_m \to 1$, $r_n \to 1$ gegen Null strebt. Daraus folgt aber:

Erstens: *Die gleichmäßige Konvergenz von $F(re^{i\theta})$ gegen eine Randfunktion $F(e^{i\theta})$ und damit die Stetigkeit von $F(z)$ auf der abgeschlossenen Kreisfläche* $|z| \leqq 1$, sobald die Konvergenz von $F(re^{i\theta})$ gegen einen Randwert an einer einzigen Stelle $\theta = \theta_0$ feststeht. Nun ergibt sich die Konvergenz nicht nur an einer einzigen Stelle, sondern auch fast überall aus der Beschränktheit von $F(z)$, die wiederum aus der bekannten Tatsache folgt, daß $|F(re^{i\theta}) - F(0)|$ die Maximalschwankung auf dem Kreise $|z| = r$, also a fortiori die Totalschwankung $T(r)$ nicht überschreiten kann.

Zweitens: *Die totalstetige Konvergenz von $F(re^{i\theta})$ gegen $F(e^{i\theta})$*, d. i. die Konvergenz gegen Null der Totalschwankung von $F(e^{i\theta}) - F(re^{i\theta})$ und daraus speziell *die Totalstetigkeit von $F(e^{i\theta})$*, d. h. die Tatsache, daß die Totalschwankung von $F(e^{i\theta})$ auf genügend kleinen Mengen beliebig klein, auf Nullmengen gleich Null ist. Diese Tatsache, verknüpft mit dem in § 3 angeführten Satze, nach welchem die Randwerte von $f(z)$ nur auf einer Nullmenge verschwinden, läßt sich, wie an anderer Stelle ausgeführt wurde[23]), folgendermaßen deuten: *Bei konformer Abbildung zweier endlichen Riemannschen Flächenstücke mit rektifizierbaren Rändern aufeinander ist das gegenseitige Entsprechen der Ränder eine totalstetige, d. h. den Nullmengen entsprechen Nullmengen.*

Szeged, den 5. November 1922.

---

[23]) Riesz l. c. [13]).

(Eingegangen am 18. November 1922.)