# Einige Bemerkungen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung.

HILDEBRANDT, Stefan

in: Periodical issue | Mathematische Zeitschrift
- 115 | Periodical
10 page(s) (169 - 178)

Math. Z. 115, 169 – 178 (1970)

# Einige Bemerkungen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung

STEFAN HILDEBRANDT

## 1. Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis von drei einfachen Ergebnissen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in isothermer Parameterdarstellung. Wir beginnen mit einem bemerkenswerten Maximumprinzip, das ein Resultat von Heinz und Hildebrandt [4] verallgemeinert und im wesentlichen aus dem Maximumprinzip für subharmonische Funktionen folgt. Danach leiten wir einen Existenzsatz her, der auch für Anwendungen auf freie Randwertprobleme von Interesse ist. Zum Abschluß stellen wir einige nützliche Resultate über das Verhalten von Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in der Umgebung eines Verzweigungspunktes zusammen.

Im folgenden bezeichnen wir mit $a \cdot b$ bzw. $a \wedge b$ das innere bzw. äußere Produkt zweier Vektoren $a, b$ des dreidimensionalen Euklidischen Raumes $E^3$, und mit $|a| = \sqrt{a \cdot a}$ die Länge von $a$. Für die Punkte der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ schreiben wir $w = u + iv$, und eine Fläche in $E^3$ wird durch $x = x(w) = x(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$ gegeben. Wir setzen $\nabla x = (x_u, x_v)$, $|\nabla x|^2 = |x_u|^2 + |x_v|^2$, und $\Delta x = x_{uu} + x_{vv}$. Ferner sei $B = \{w : |w| < 1\}$, $B_r(w_0) = \{w : |w - w_0| < r\}$, und

$$D(x) = \iint_B |\nabla x|^2 \, du \, dv.$$

Außerdem setzen wir für $G \subset \mathbb{C}$

$$|x|_{0,G} = \sup_{w \in G} |x(w)|,$$

und $H_1(B)$ und $\mathring{H}_1(B)$ stehen für die in [6], I, S. 207 definierten Sobolewräume. Wir verweisen auf die dort gemachten Bemerkungen über die Randwerte von $H_1(B)$-Funktionen. Schließlich sei

$$D_u = \frac{\partial}{\partial u}, \quad D_v = \frac{\partial}{\partial v}, \quad \frac{\partial}{\partial w} = (D_u - i D_v), \quad \frac{\partial}{\partial \overline{w}} = (D_u + i D_v).$$

## 2. Ein Einschließungssatz (Maximumprinzip)

Zunächst betrachten wir eine Klasse von konvexen Funktionen.

**Definition 1.** Unter einer *Eichfunktion auf* $E^3$ verstehen wir eine reellwertige Funktion $k$ der Klasse $C^2(E^3)$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:

$(\alpha)$ $\gamma_k(x) = \inf_{|\xi|=1} \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial^2 k(x)}{\partial x^i \partial x^j} \xi^i \xi^j > 0$ für alle $x \in E^3$,

$(\beta)$ $k(0) = 0$, grad $k(0) = 0$.

Für eine Eichfunktion $k$ auf $E^3$ gilt dann, wie man leicht einsieht, das folgende:

1. $k(\alpha x + \beta y) \leqq \alpha k(x) + \beta k(y)$ für $\alpha, \beta \geqq 0$ mit $\alpha + \beta = 1$ und für beliebige $x, y \in E^3$.
2. $k(x) > 0$, $|\text{grad}\, k(x)| > 0$ für $x \in E^3 - \{0\}$.
3. $k(x) \to +\infty$ für $|x| \to +\infty$.
4. Durch

$$K_R(m) = \{x \in E^3 : k(x-m) \leqq R\}$$

wird ein kompakter konvexer Körper des $E^3$ definiert, den wir (die zu $k$ gehörende) *Eichkugel* mit dem Mittelpunkt $m \in E^3$ und dem Radius $R$ nennen wollen. Zur Abkürzung setzen wir noch

$$K = \{x : k(x) \leqq 1\} = K_1(0).$$

**Lemma 1.** *Sei $h$ eine reelle Zahl mit $0 < h < 1$, und bezeichne $k$ eine Eichfunktion auf $E^3$, die den folgenden Bedingungen genügt:*

$$\gamma(k) = \inf_{x \in E^3} \gamma_k(x) > 0, \tag{2.1}$$

$$|\text{grad}\, k|_{0,K} = q < \frac{\gamma(k)}{h}. \tag{2.2}$$

*Ferner sei $G$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, und bezeichne $x: \bar{G} \to E^3$ eine Fläche der Klasse $C^0(\bar{G}) \cap C^2(G)$, die der Differentialungleichung*

$$|\Delta x| \leqq h |\nabla x|^2 \quad \text{in } G \tag{2.3}$$

*und den Nebenbedingungen*

$$x(w) \in K \quad \text{für } w \in \bar{G} \tag{2.4}$$

*und*

$$x(w) \in K_R(m) \quad \text{für } w \in \partial G \tag{2.5}$$

*genügt, wobei $m$ ein fester Punkt aus $E^3$ und $0 \leqq R \leqq 1$ ist. Dann gilt*

$$x(w) \in K_R(m) \quad \text{für } w \in \bar{G}. \tag{2.6}$$

*Beweis.* Wir wenden eine Kontinuitätsmethode an, und zwar betrachten wir die Flächenschar

$$x_t(w) = x(w) - t\,m = (1-t)\,x(w) + t\,\{x(w) - m\} \tag{2.7}$$

für $t \in [0, 1]$. Wegen der Konvexität von $k$ folgt

$$k(x_t) \leqq (1-t)\,k(x) + t\,k(x-m). \tag{2.8}$$

Mittels (2.4) und (2.5) ergibt sich hieraus

$$k(x_t(w)) \leqq 1 \quad \text{für } w \in \partial G \quad \text{und} \quad t \in [0, 1]. \tag{2.9}$$

Andererseits ist $k \circ x_t$ von der Klasse $C^0(\bar{G}) \cap C^2(G)$ und genügt für alle $t \in [0, 1]$ der Differentialungleichung

$$\begin{aligned} \Delta k(x_t) &= \sum_{i,j=1}^{3} k_{x^i x^j}(x_t) \{D_u x_t^i D_u x_t^j + D_v x_t^i D_v x_t^j\} + \sum_{i=1}^{3} k_{x^i}(x_t) \Delta x_t^i \\ &\geqq \gamma(k) |\nabla x|^2 - |\operatorname{grad} k(x_t)| \, |\Delta x| \quad \text{in } G. \end{aligned}$$

Wegen (2.3) folgt dann

$$\Delta k(x_t) \geqq \{\gamma(k) - h |\operatorname{grad} k(x_t)|\} |\nabla x|^2 \quad \text{auf } G. \tag{2.10}$$

Wir setzen

$$\varphi(t) = |\operatorname{grad} k(x_t)|_{0, \bar{G}}. \tag{2.11}$$

Nach (2.10) ist also $k \circ x_t$ in $G$ subharmonisch, falls $\varphi(t) \leqq \gamma(k) h^{-1}$, und wegen (2.9) folgt dann aus dem Maximumprinzip $k(x_t(w)) \leqq 1$ für alle $w \in \bar{G}$; somit ergibt sich $\varphi(t) \leqq q$ aufgrund von (2.2). Daher gilt folgende Alternative: Entweder ist $\varphi(t) \leqq q < \gamma(k) h^{-1}$, oder es ist $\varphi(t) > \gamma(k) h^{-1}$. Andererseits ist $\varphi(t)$ offensichtlich stetig für $0 \leqq t \leqq 1$, und wegen (2.2) und (2.4) gilt $\varphi(0) \leqq q$, so daß schließlich $\varphi(1) \leqq q$ folgt. Also ist $k(x(w) - m)$ auf $G$ subharmonisch, und aus (2.5) ergibt sich mit dem Maximumprinzip die Behauptung (2.6).

Im Falle $k(x) = |x|^2$ fällt der obige Hilfssatz gerade mit dem in [4] bewiesenen Lemma 1 zusammen, das zum Beweis einer isoperimetrischen Ungleichung (vgl. [4], Theorem 1) für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung benötigt wurde.

Eine weitere interessante *Anwendung von Lemma* 1 ergibt sich, wenn wir $k$ als eine positiv definite quadratische Form wählen. Dann ist $K = \{x : k(x) \leqq 1\}$ ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt 0, dessen Hauptachsen mit $a, b, c$ bezeichnet seien, $a \geqq b \geqq c > 0$. Wir erhalten

$$\gamma(k) = \frac{2}{a^2} > 0 \tag{2.12}$$

und

$$|\operatorname{grad} k(x)| \leqq \frac{2}{c} \sqrt{k(x)} \quad \text{für alle } x \in E^3. \tag{2.13}$$

Setzen wir also

$$h < \frac{c}{a^2} \tag{2.14}$$

voraus, so folgt

$$|\operatorname{grad} k|_{0,K} \leqq \frac{2}{c} < \frac{2}{a^2 h} = \frac{\gamma(k)}{h}.$$

Unter der Voraussetzung (2.14) erfüllt daher $k$ die Voraussetzungen von Lemma 1.

Als geometrische Anwendung von Lemma 1 erhalten wir einen *Einschließungssatz (Maximumprinzip)* für Lösungen $x$ der Differentialgleichung

$$\Delta x = 2\mathcal{H}(w)(x_u \wedge x_v),$$

insbesondere also für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung $\mathcal{H}(w)$ in konformer Parameterdarstellung.

**Satz 1.** *Sei $G$ ein beschränktes Gebiet in $\mathbb{C}$, ferner sei $\mathcal{H}$ eine auf $G$ stetige reellwertige Funktion mit $h = \sup_{w \in G} |\mathcal{H}(w)| < 1$, und bezeichne $x\colon \bar{G} \to E^3$ eine Fläche der Klasse $C^0(\bar{G}) \cap C^2(G)$, die der Differentialgleichung*

$$\Delta x = 2\mathcal{H}(w)(x_u \wedge x_v) \quad \text{in } G \tag{2.15}$$

*genügt. Schließlich sei $k$ eine die Bedingungen (2.1) und (2.2) erfüllende Eichfunktion. Dann ergibt sich aus*

$$x(w) \in K \quad \text{für } w \in \bar{G}, \qquad \text{und} \qquad x(w) \in K_R(m) \quad \text{für } w \in \partial G, \qquad 0 \leqq R \leqq 1,$$

*sogar*

$$x(w) \in K_R(m) \quad \text{für alle } w \in \bar{G}.$$

*Insbesondere gilt die Behauptung des Satzes, wenn man $k$ als positiv definite quadratische Form wählt und wenn für die Hauptachsen $a, b, c$ $(a \geqq b \geqq c > 0)$ des zugeordneten Ellipsoides $K = \{x\colon k(x) \leqq 1\}$ die Bedingung*

$$h < \frac{c}{a^2} \tag{2.14}$$

*erfüllt ist.*

## 3. Ein Existenzsatz

In diesem Abschnitt skizzieren wir den Beweis einer Erweiterung des in [6], I, gegebenen Existenzsatzes für Flächen vorgeschriebener mittlerer Krümmung.

**Lemma 2.** *Sei $H^*$ eine reellwertige Funktion der Klasse $C^1(E^3)$ mit dem zugeordneten Vektorpotential*

$$Q^*(x) = \frac{4}{3}\left(\int_0^{x^1} H^*(\tau, x^2, x^3)\,d\tau,\ \int_0^{x^2} H^*(x^1, \tau, x^3)\,d\tau,\ \int_0^{x^3} H^*(x^1, x^2, \tau)\,d\tau\right), \tag{3.1}$$

*und sei $k$ eine Eichfunktion auf $E^3$, die den Bedingungen*

$$|Q^*(x)| \leqq 2q^* \quad \text{für alle } x \in E^3, \qquad 0 < q^* < 1, \tag{3.2}$$

*und*

$$|\operatorname{grad} k(x)|\,|H^*(x)| \leqq \gamma_k(x) \quad \text{für alle } x \in E^3 \tag{3.3}$$

*genügen. Weiter bezeichne B die Kreisscheibe* $\{w: |w|<1\}$. *Dann hat das Variationsproblem*

$$P^*: \begin{cases} E^*(z)=\iint\limits_B \{|\nabla z|^2+Q^*(z)\cdot(z_u\wedge z_v)\}\,du\,dv\to Min \\ \text{unter allen } z\in H_1(B) \text{ mit } z-f\in \mathring{H}_1(B) \end{cases}$$

*für jedes* $f\in H_1(B)\cap C^0(\partial B)$ *mit* $\max\limits_{\partial B} k\circ f\leqq 1$ *eine Lösung* $x\in C^0(\bar{B})\cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta\in(0,1)$, *die das Dirichletproblem*

$$\Delta x=2H^*(x)(x_u\wedge x_v) \quad \text{in } B, \qquad x=f \quad \text{auf } \partial B \tag{3.4}$$

*löst und der Ungleichung*

$$\max_B k\circ x\leqq 1 \tag{3.5}$$

*genügt.*

*Beweis.* Aus (3.2) folgt

$$(1-q^*)\,|\nabla x|^2\leqq|\nabla x|^2+Q^*(x)\cdot(x_u\wedge x_v)\leqq(1+q^*)\,|\nabla x|^2, \qquad 0<q^*<1,$$

und daher

$$(1-q^*)\,D(x)\leqq E^*(x)\leqq(1+q^*)\,D(x)$$

für beliebiges $x\in H_1(B)$. Mittels wohlbekannter Schlüsse von Morrey (vgl. [7], Lemma 1.9.2, Theorem 1.9.1, 1.10.2, 1.10.3, 1.10.4) und einem Regularitätssatz von Heinz und Tomi (vgl. [10]) folgt, daß das Variationsproblem $P^*$ für jedes $f\in H_1(B)\cap C^0(\partial B)$ eine Lösung $x\in C^0(\bar{B})\cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta\in(0,1)$, hat, die das Dirichletproblem (3.4) löst und daher insbesondere der Differentialungleichung

$$|\Delta x|\leqq|H^*(x)|\,|\nabla x|^2 \qquad \text{in } B \tag{3.6}$$

genügt. Andererseits gilt

$$\Delta k(x)=\sum_{i,j=1}^{3} k_{x^i x^j}(x)\{x_u^i x_u^j+x_v^i x_v^j\}+\sum_{i=1}^{3} k_{x^i}(x)\,\Delta x^i.$$

Hieraus folgt wegen (3.3) und (3.6)

$$\Delta k(x)\geqq\{\gamma_k(x)-|\operatorname{grad} k(x)|\,|H^*(x)|\}\,|\nabla x|^2\geqq 0 \qquad \text{in } B,$$

d.h. $k\circ x\in C^0(\bar{B})\cap C^2(B)$ ist in $B$ subharmonisch. Aus $\max\limits_{\partial B} k\circ f\leqq 1$ folgt dann mittels des Maximumprinzips auch $\max\limits_B k\circ x\leqq 1$, womit das Lemma bewiesen ist.

Aus Lemma 2 ergibt sich nunmehr

**Satz 2.** *Bezeichne k eine Eichfunktion auf* $E^3$ *mit der Eichkugel* $K=\{x: k(x)\leqq 1\}$, *und sei H eine reellwertige Funktion der Klasse* $C^1(K)$, *die den Bedingungen*

$$|\operatorname{grad} k(x)|\,|H(x)|\leqq\gamma_k(x) \qquad \text{für alle } x\in K \tag{3.7}$$

*und*

$$h = \max_{x \in K} |H(x)| < \tfrac{3}{2} \cdot \{\max_{x \in K} |x|\}^{-1} \tag{3.8}$$

*genügt. Ferner bezeichne*

$$Q(x) = \frac{4}{3}\left(\int_0^{x^1} H(\tau, x^2, x^3)\, d\tau, \int_0^{x^2} H(x^1, \tau, x^3)\, d\tau, \int_0^{x^3} H(x^1, x^2, \tau)\, d\tau\right)$$

*das $H$ zugeordnete Vektorpotential der Klasse $C^1(K)$, und es sei $B = \{w: |w| < 1\}$.*

(i) **Dirichletproblem.** *Für jedes $f \in H_1(B) \cap C^0(\partial B)$ mit $\max_{\partial B} k \circ f \leqq 1$ hat das Variationsproblem*

$$P: \begin{cases} E(z) = \iint_B \{|\nabla z|^2 + Q(z) \cdot (z_u \wedge z_v)\}\, du\, dv \to Min \\ \text{unter allen } z \in H_1(B) \text{ mit } z - f \in \mathring{H}_1(B) \text{ und } \operatorname{ess.max}_B k \circ z \leqq 1 \end{cases}$$

*eine Lösung $x \in C^0(\bar{B}) \cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta \in (0, 1)$, die auch*

$$\Delta x = 2H(x)\, x_u \wedge x_v \quad \text{in } B, \qquad x = f \quad \text{auf } \partial B$$

*löst und $\max_B k \circ x \leqq 1$ genügt.*

(ii) **Plateauproblem.** *Bezeichne $\Gamma$ eine in der Eichkugel $K$ gelegene geschlossene Jordankurve des $E^3$, und sei $\mathfrak{C}(\Gamma)$ die Klasse aller $x \in H_1(B) \cap C^0(\partial B)$ mit $\operatorname{ess.max}_B k \circ x \leqq 1$, die $\partial B$ schwach monoton auf $\Gamma$ abbilden. Wenn $\mathfrak{C}(\Gamma)$ nichtleer ist, so hat das Variationsproblem*

$$\mathfrak{P}: \; E(z) \to \text{Min} \qquad \text{unter allen } z \in \mathfrak{C}(\Gamma)$$

*eine Lösung $x \in \mathfrak{C}(\Gamma) \cap C^0(\bar{B}) \cap C^{2+\beta}(B)$, $\beta \in (0, 1)$, die $\partial B$ sogar topologisch auf $\Gamma$ abbildet und in $B$ den Gleichungen*

$$\Delta x = 2\; H(x)(x_u \wedge x_v), \qquad |x_u| = |x_v|, \qquad x_u \cdot x_v = 0$$

*genügt.*

*Beweis.* Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß anstelle von (3.7) sogar

$$|\operatorname{grad} k(x)|\, |H(x)| < \gamma_k(x) \qquad \text{für } x \in K \tag{3.7*}$$

gilt (der allgemeinere Fall (3.7) kann aus (3.7*) ähnlich wie in [6], I, durch eine Approximationsmethode gewonnen werden). Dann können wir eine „Fortsetzung" $H^* \in C^1(E^3)$ von $H$ finden, die auf $K$ mit $H$ übereinstimmt, außerhalb einer geeigneten Eichkugel $K_{1+\varepsilon}(0)$, $\varepsilon > 0$, verschwindet und die Bedingungen (3.2) und (3.3) erfüllt (die hierzu nötigen Überlegungen verlaufen ähnlich wie im Beweis von Satz 2 aus [6], Teil I). Nunmehr folgt aus Lemma 2 die Behauptung (i) des Satzes; der Beweis von (ii) ergibt sich dann leicht aus (i) (vgl. [6], I).

Eine interessante Anwendung findet das soeben bewiesene Ergebnis in der Theorie der freien Randwertprobleme für Flächen vorgegebener mittlerer Krümmung $H = H(x)$ (vgl. [6], II). Es zeigt nämlich, daß man unter gewissen Voraussetzungen über $H$ und das konvexe „Gefäß" $K$ Flächen $x = x(w)$ der vorgeschriebenen mittleren Krümmung $H$ mit freiem Rand auf der Gefäßwand $\partial K$ finden kann, die ganz im Gefäß $K$ liegen.

## 4. Verzweigungspunkte

Abschließend wollen wir eine bei geometrischen Anwendungen [1] nützliche „Normalform" für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung in der Umgebung eines Verzweigungspunktes herleiten, die für Minimalflächen von Chen [1] (vgl. auch [8], S. 235) bewiesen wurde. Der Teil (i) des folgenden Satzes stammt von Heinz (vgl. z. B. [3]).

**Satz 3.** *Sei $G$ ein Gebiet der komplexen Ebene, $\mathscr{H} \in C^0(G)$ eine reellwertige Funktion, und sei $x\colon G \to E^3$ eine Fläche der Klasse $C^2(G)$ mit* $x \not\equiv \mathrm{const}$ *auf $G$, die in $G$ den Gleichungen*

$$\Delta x = 2\mathscr{H}(w)(x_u \wedge x_v) \tag{4.1}$$

*und*

$$|x_u| = |x_v|, \qquad x_u \cdot x_v = 0 \tag{4.2}$$

*genügt. Weiter bezeichne $w_0 \in G$ einen Verzweigungspunkt von $x$, d.h. es gelte* $x_u(w_0) = x_v(w_0) = 0$.

(i) *Dann gibt es einen Vektor $a \in \mathbb{C}^3$ mit $a \neq 0$ und*

$$(a)^2 = \sum_{j=1}^{3} (a^j)^2 = 0,$$

*sowie eine natürliche Zahl $\nu \geqq 1$, so daß*

$$x_w = x_u - i x_v = a(w - w_0)^\nu + o(|w - w_0|^\nu) \quad \text{für } w \to w_0. \tag{4.3}$$

(ii) *Ferner existieren eine reelle Zahl $A > 0$ und eine orthogonale Abbildung $O$ von $E^3$ auf sich mit* $\det O = 1$, *so daß für $z = O(x - x_0)$, $x_0 = x(w_0)$, die asymptotische Darstellung*

$$\left.\begin{aligned} z^1 + i z^2 &= A(w - w_0)^{\nu+1} + o(|w - w_0|^{\nu+1}) \\ z^3 &= \phantom{A(w - w_0)^{\nu+1} +{}} o(|w - w_0|^{\nu+1}) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } w \to w_0 \tag{4.4}$$

*besteht.*

*Beweis.* 1. Zunächst nehmen wir an, daß $G = B = \{w\colon |w| < 1\}$, $x \in C^2(\bar{B})$ und $x \not\equiv \mathrm{const}$ auf $B$ ist. Dann ergibt sich (i), wie Heinz bemerkt hat, mit einer Schlußweise von Hartman und Wintner [2]. Der Vollständigkeit halber

[1] Vgl. z. B. Serrin [9], und Heinz/Hildebrandt [4].

wiederholen wir das Argument. Ist nämlich $B^* \subset B$ ein glattberandetes Gebiet, so gilt für beliebiges $\Phi \in C^1(\bar{B}^*)$

$$\frac{1}{2i} \oint_{\partial B^*} x_w \cdot \Phi \, dw = \iint_{B^*} (x_w \cdot \Phi_{\bar{w}} + x_{w\bar{w}} \cdot \Phi) \, du \, dv.$$

Andererseits folgt aus (4.1) und $x \in C^2(\bar{B})$ eine Differentialungleichung der Form

$$|x_{w\bar{w}}| \leqq \alpha |x_w| \quad \text{in } B$$

mit einer geeigneten Konstanten $\alpha$, und somit

$$\tfrac{1}{2} \Big| \oint_{\partial B^*} x_w \cdot \Phi \, dw \Big| \leqq \iint_B \{|\Phi_{\bar{w}}| + \alpha |\Phi|\} \, |x_w| \, du \, dv$$

für alle $\Phi \in C^1(\bar{B}^*)$. Nach [2], S. 455–458, ergibt sich dann die Behauptung von (i).

Zum Beweis von (ii) nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_0 = 0$ und $x_0 = x(w_0) = 0$ an. Dann erhalten wir aus (4.3) und

$$x(w) = x(u, v) = \int_0^1 [u \, x_u(t u, t v) + v \, x_v(t u, t v)] \, dt$$

die Relation

$$x(w) = \frac{1}{v+1} \operatorname{Re} a \, w^{v+1} + o(|w|^{v+1}), \quad (w \to 0). \tag{4.5}$$

Setzen wir $\dfrac{a}{v+1} = \alpha - i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^3$, so folgt

$$x(w) = \alpha \operatorname{Re} w^{v+1} + \beta \operatorname{Im} w^{v+1} + o(|w|^{v+1}), \quad (w \to 0). \tag{4.6}$$

Andererseits gilt nach (4.3)

$$\frac{1}{v+1} x_u(w) = (\alpha \operatorname{Re} w^v + \beta \operatorname{Im} w^v) + o(|w|^v),$$

$$\frac{1}{v+1} x_v(w) = (-\alpha \operatorname{Im} w^v + \beta \operatorname{Re} w^v) + o(|w|^v).$$

Setzen wir insbesondere $w = u \in \mathbb{R}$, so ergibt sich hieraus wegen (4.2)

$$|\alpha| = |\beta|, \quad \alpha \cdot \beta = 0, \tag{4.7}$$

und damit folgt $2|\alpha|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 = \dfrac{|a|^2}{(v+1)^2} > 0$ oder $|\alpha| > 0$. Also gibt es zwei Vektoren $e_1, e_2 \in E^3$ und eine reelle Zahl $A > 0$ mit

$$\alpha = A e_1, \quad \beta = A e_2, \quad |e_1| = |e_2| = 1, \quad e_1 \cdot e_2 = 0$$

und

$$x(w) = A\, e_1 \operatorname{Re} w^{\nu+1} + A\, e_2 \operatorname{Im} w^{\nu+1} + o(|w|^{\nu+1}). \tag{4.8}$$

Mittels einer geeigneten orthogonalen Abbildung $O$ des $E^3$ mit $\det O = 1$ können wir dann für $z = O\,x$ die asymptotische Darstellung

$$\begin{aligned} z^1(w) &= A \operatorname{Re} w^{\nu+1} + o(|w|^{\nu+1}) \\ z^2(w) &= A \operatorname{Im} w^{\nu+1} + o(|w|^{\nu+1}) \qquad \text{für } w \to 0 \\ z^3(w) &= \phantom{A \operatorname{Im} w^{\nu+1}} + o(|w|^{\nu+1}) \end{aligned}$$

erreichen, woraus (4.4) folgt.

2. Aufgrund von 1. ergibt sich die Behauptung des Satzes auch für ein beliebiges Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, sobald gezeigt ist, daß aus „$x \not\equiv$ const auf $G$" auch „$x \not\equiv$ const auf $U$" für jedes Teilgebiet $U \subseteqq G$ folgt.

Zum Beweis des letzteren nehmen wir an, daß $x(w) = c =$ const auf einem Teilgebiet $U \subseteqq G$ ist. Dann bezeichne $U_c$ das maximale, $U$ enthaltende Teilgebiet von $G$, auf dem $x(w) = c$ gilt. Wegen $x \not\equiv$ const auf $G$ ist $U_c$ ein echtes Teilgebiet von $G$. Somit gibt es einen Punkt $w_0 \in \partial U_c \cap G$, der Verzweigungspunkt von $x$ sein muß wegen $x_w = 0$ auf $U_c$. Nach Konstruktion von $U_c$ ist dann $x \not\equiv$ const auf jeder Kreisscheibe $B_r(w_0) \subset G$, so daß wir die Ergebnisse von 1. anwenden dürfen. Aus der asymptotischen Darstellung (4.4) von $x$ in der Nähe von $w_0$ ergibt sich aber $|x(w) - x(w_0)| > 0$, und somit insbesondere $x(w) \neq c$, wenn nur $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ ausfällt und $\varepsilon > 0$ hinreichend klein gewählt wird. Dies liefert jedoch einen Widerspruch zu $x(w) = c$ für $w$ aus der nichtleeren Menge $B_\varepsilon(w_0) \cap U_c$.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

## Bemerkungen und Folgerungen

1. Der Satz bleibt richtig, wenn man (4.1) durch die allgemeineren, von Heinz in [3] betrachteten Systeme ersetzt.

2. Ein entsprechendes Resultat gilt für die auf $\partial G$ liegenden Verzweigungspunkte einer Lösung von (4.1), (4.2), die $\partial G$ auf eine geschlossene Jordankurve der Klasse $C^2$ im $E^3$ abbildet. Hierbei ist der fundamentale Regularitätssatz von Heinz [3] heranzuziehen.

3. Aus der Normalform (4.3) und (4.4) ergibt sich insbesondere:

(a) Die Verzweigungspunkte $w_0$ sind isoliert.

(b) Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ gibt es eine Konstante $A^* > 0$, so daß $|x(w) - x(w_0)| \geqq A^* |w - w_0|^{\nu+1} > 0$, falls $0 < |w - w_0| < \varepsilon$ ist und $w_0$ einen Verzweigungspunkt von $x$ bezeichnet.

(c) In jeder Umgebung eines Verzweigungspunktes $w_0$ von $x$ gibt es zwei Punkte $w_1$ und $w_2$ mit $w_1 \neq w_2$ und $x(w_1) = x(w_2)$. Ein Beweis hierfür findet sich bei Chen [1] oder bei Serrin [9].

(d) Der Normalenvektor

$$\mathfrak{N}(w) = \frac{x_u(w) \wedge x_v(w)}{|x_u(w) \wedge x_v(w)|}$$

konvergiert für $w \to w_0$ gegen einen Grenzwert. Entsprechend konvergiert die Tangentialebene gegen eine Grenzlage.

## Literatur

1. Chen, Y. W.: Branch points, poles, and planar points of minimal surfaces in $R^3$. Ann. of Math. **49**, 790–806 (1948).
2. Hartman, P., Wintner, A.: On the local behavior of solutions of nonparabolic partial differential equations. Amer. J. Math. **75**, 449–476 (1953).
3. Heinz, E.: Über das Randverhalten quasilinearer elliptischer Systeme mit isothermen Parametern. Math. Z. **113**, 99–105 (1970).
4. – Hildebrandt, S.: On the number of branch points of surfaces of bounded mean curvature. J. Differential Geometry. Erscheint demnächst.
5. Hildebrandt, S.: Über Flächen konstanter mittlerer Krümmung. Math. Z. **112**, 107–144 (1969).
6. – Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebener mittlerer Krümmung und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie. I. Math. Z. **112**, 205–213 (1969).
7. Morrey, C. B.: Multiple integrals in the calculus of variations. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1966.
8. Nitsche, J. C. C.: On new results in the theory of minimal surfaces. Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 195–270 (1965).
9. Serrin, J.: On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve. Math. Z. **112**, 77–88 (1969).
10. Tomi, F.: Ein einfacher Beweis eines Regularitätssatzes für schwache Lösungen gewisser elliptischer Systeme. Math. Z. **112**, 214–218 (1969).

Prof. Stefan Hildebrandt
Mathematisches Institut der
Universität Mainz
D-65 Mainz, Saarstraße 21

*(Eingegangen am 15. Februar 1970)*