wodurch man für $w(z)$ die Differentialgleichung

$$z^2 w'' + zw'\left[m + 1 - \frac{u}{2\sigma} + z\right] + w\left[\frac{m^2 - n^2}{4} - \frac{mu}{4\sigma}\right] = 0$$

erhält. Für $z = 0$ hat diese Gleichung eine Stelle der Bestimmtheit, die determinierende Gleichung hat die reellen Wurzeln

$$\varrho = \frac{m}{2} - \frac{1}{4}\frac{u}{\sigma} \pm \frac{1}{2}\sqrt{n^2 + \frac{1}{4}\frac{u^2}{\sigma^2}}.$$

Durch Einführung der Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 nimmt die Differentialgleichung die Form an

$$z^2 w'' + zw'[1 - \varrho_1 - \varrho_2 + z] + \varrho_1 \varrho_2 w = 0.$$

Das ist aber *genau die Differentialgleichung* (VI') *von Seite 54,* so daß alles dort weiter Mitgeteilte auch hier gilt.

Über ein Prinzip der Befreiung bei Lagrange.

Von GEORG HAMEL in Aachen.

Man kann in der Entwicklung der Mechanik hauptsächlich vier Wege der Begründung unterscheiden, die man, um Namen zu haben, den natürlichen oder physikalischen, den stereomechanischen, den Weg über die Punktmechanik und den analytischen nennen mag.

Auf dem ersten Weg, den von den neueren Autoren hauptsächlich Jaumann geht, den aber auch ich in meinem Lehrbuche vor allem verfolgt habe (in den Teilen I und III), faßt man die mechanische Welt als ein beliebig bewegliches Kontinuum auf, das durch innere Spannungen zusammengehalten wird und dessen Teile auch noch durch Fernkräfte aufeinander wirken können. Druck, Zug und Schubkraft sind also hier die ersten und wichtigsten Begriffe und Vorstellungen der Mechanik sowie als Objekt ihres Wirkens das Volumelement. Grundsätze gibt es hauptsächlich zwei: das Newtonsche Grundgesetz mit Einschluß des Satzes vom Parallelogramm der Kräfte und das Gesetz der Symmetrie der Spannungsdyade (von mir das Boltzmannsche genannt). Die verschiedenen mechanischen Systeme unterscheiden sich dann durch die Art der Abhängigkeit der Spannungsdyade von ihren Ursachen, insbesondere den Deformationen. Reaktionskräfte gibt es an sich nicht, sie entstehen erst als Grenzfälle durch Einführung von Idealsystemen, d. h. Annahme von gewissen, in Wahrheit nie exakt erfüllten Bewegungseinschränkungen. Reaktionskräfte können nämlich als solche Kräfte definiert werden, die durch die Bewegungseinschränkungen einen gewissen Teil ihrer Ursachen einbüßen und dadurch, wenigstens für den Ansatz des Problems, teilweise unbekannt werden. Bei ihrer Absonderung spielt das Prinzip des zureichenden Grundes eine bedeutende Rolle (siehe mein Lehrbuch Nr. 62,63.) Das d'Alembertsche Prinzip, das nur für solche Idealsysteme einen nicht trivialen Sinn hat, ist dann für alle bekannten Idealsysteme beweisbar.

Der zweite Weg geht vom starren Körper aus (mein Buch, Teil II). Auf ihm spricht man ursprünglich nur von den eingeprägten Kräften, die Reaktionskräfte sind natürlich da, aber gewissermaßen nicht zu sehen, in den Sätzen kommen sie nicht vor. Voran steht die Statik. Die Statik des starren Körpers folgt aus dem Newtonschen Grundgesetz und aus dem Verschiebungssatz; die Statik allgemeiner Systeme liefert das Erstarrungsprinzip. Hier müssen allerdings schon die Reaktionen zwischen den einzelnen starren Körpern eingeführt werden. Auf die Statik baut man erst die Kinetik. Die Stereokinetik begründet man mit dem hier als Axiom stehenden d'Alembertschen Prinzip. Weiter scheint mir hier die historische Entwicklung nicht zu gehen (Varignon, Johann Bernouilli, d'Alembert). Will man die Kinetik allgemeiner Systeme anschließen, so muß man zum ersten Wege hinlenken, den Begriff der inneren Spannung aus der Anschauung entwickeln und das Boltzmannsche Prinzip ausdrücklich formulieren, denn es steckt nicht schon im d'Alembertschen Prinzip, wenigstens nicht in dessen Originalfassung, und läßt sich auch nur gezwungen diesem anfügen.

Der dritte Weg kennt nur diskrete Punktsysteme, vereinfacht also das Objekt der Mechanik außerordentlich. Dementsprechend einfach sind die Mittel: das Newtonsche Grundgesetz nebst Parallelogrammgesetz mit der Annahme bloßer Zentralkräfte und ein mehr als heute zulässig verallgemeinertes Gesetz der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung. Dieser Weg führt schnell in einige Anwendungsgebiete der sogenannten klassischen Mechanik, arbeitet aber für uns doch mit zu primitiven Mitteln und Vorstellungen und findet schon ganz erhebliche Schwierigkeiten bei der Begründung der Systemmechanik.

Und nun zum vierten Weg, zu Lagranges analytischer Methode. Lagrange geht auch von Punkten aus, aber das ist ganz unwesentlich, er könnte geradeso gut von Volumelementen reden, und eigentlich meint er später auch immer solche, wenn er von „corps" spricht. Wichtig hingegen ist, daß Lagrange zunächst nur eingeprägte Kräfte kennt, sie sind das Gegebene, das physikalisch Bedingte, das durch Ursachen Bestimmte. Seine Systeme sind Bindungen unterworfen, aber viel allgemeinerer Art, als sie der zweite und dritte Weg kennen. Als Hilfsmittel hat er außer dem Newtonschen Grundgesetz (einschl. Kräfteparallelogramm) das Prinzip der virtuellen Verrückungen in der für die Kinetik verallgemeinerten Form. Dieses Prinzip bringt von selbst Größen hinein, die zunächst rein mathematisch definiert sind: die berühmten Lagrangeschen Parameter oder Multiplikatoren. Und nun entsteht die Aufgabe zu zeigen, daß diese Parameter mechanische Bedeutung haben, daß sie Kräfte sind, nämlich Reaktionskräfte. Es muß also genau der umgekehrte Schritt wie beim ersten Weg geschehen: aus dem idealisierten Begriff muß der allgemeine, aus dem erstarrten der lebendige entwickelt werden. Vor allem handelt es sich um den Begriff der inneren Spannung, der nicht wie beim ersten Weg voransteht, auch nicht, wie beim zweiten Wege, von außen, aus der Anschauung heraus, angeschlossen wird, sondern aus dem Bisherigen organisch entstehen soll. Man beachte, daß die Lagrangeschen eingeprägten Kräfte zunächst nur irgendwelche, den Volumelementen zugeordnete, und wie wir wohl noch hinzufügen müssen, durch physikalische Ursachen bedingte Vektoren sind, deren Summe nur mit dem Volumelement unendlich klein werden muß. Also nicht einmal die Existenz flächenhaft verteilter Kräfte steht von vornherein fest, sie muß erst dargetan werden. Das alles leistet nun ein Prinzip, das zwar nirgendwo bei Lagrange formuliert wird, das man aber gleichwohl geradezu das Leitprinzip seines großen Werkes nennen kann: ich möchte es das Prinzip der Befreiung nennen, weil es auch das Gegenstück zum Erstarrungsprinzip ist.

Das Prinzip kann so formuliert werden:

„Betrachten wir ein beliebiges System und fassen eine bestimmte seiner Bedingungsgleichungen $f = 0$ und den ihr zugehörigen Parameter λ ins Auge. Stellen wir daneben ein System von einem höheren Freiheitsgrad, indem wir diese eine Bedingungsgleichung fortlassen, sonst aber ganz das alte beibehalten, so bewegt sich dieses befreite System nach formal denselben Gleichungen wie das erste System, nur daß das λ jetzt eine eingeprägte Kraftgröße ist. Dieses λ ist also bei dem befreiten System durch die physikalischen und kinematischen Bedingungen desselben eindeutig bestimmt."

Der erste Teil ist trivial und selbstverständlich: das neue Prinzip liegt in dem letzten Teil. Man sieht, wie das Prinzip aus der Masse aller eingeprägten Kräfte besondere hervorhebt, und darin liegt seine weittragende Bedeutung.

Die praktische Bedeutung des Prinzips hat bereits vollständig Heun erkannt, wenn er wiederholt darauf hinweist, daß die Lagrangesche Mechanik nicht nur die Bewegung eines Systems zu berechnen gestattet, sondern auch die dabei auftretenden Reaktionen. Aber über diese praktische Seite der Sache hinaus möchte ich ihre erkenntnistheoretische und ihre psychologisch-historische Wichtigkeit hervorheben: ich behaupte, daß dieses unausgesprochene Prinzip die Seele der Mécanique analitique genannt werden kann, insofern als dieses Werk in seinem weitaus größten Teile nach ihm aufgebaut worden ist, ich behaupte weiter, daß die Gewinnung des allgemeinen Begriffes der Spannungsdyade durch das Prinzip der Befreiung geradezu als das Ziel der Mécanique analytique bezeichnet werden kann, obwohl es infolge des frühen Todes des Verfassers nicht ganz erreicht wurde. Aber alles strebt diesem Ziele zu, vielleicht dem Verfasser selbst unbewußt, obwohl es in Sektion IV, § I, Nr. 7 heißt: c'est en quoi consiste l'esprit de la methode.

Gehen wir zum Beweis dieser Behauptung die Mécanique analytique kurz durch.

Zunächst die Statik. Nach einer Einleitung über das Prinzip der virtuellen Arbeiten folgen erst die allgemeinen Sätze des Gleichgewichtes gegen Verschiebung und Drehung. Danach wird die Multiplikatorenmethode auseinandergesetzt und klar und deutlich die Kraftbedeutung der Multiplikatoren formuliert. Und nun folgen ganz systematisch: Vorab der freie Punkt, dann zunächst mehrere Punkte an einem unausdehnbaren Faden (das λ ist die Fadenspannung) und sofort dazu das entsprechende befreite System: die Punkte am dehnbaren Faden. Gewonnen ist so der Begriff der Spannung als einer eingeprägten Kraft beim elastischen Faden. Darauf kommt der starre Stab mit aufgesetzten Punkten an die Reihe: als befreites System folgt ihm der elastische Stab. Wir haben damit schon eine Einsicht in die Beanspruchungsmöglichkeiten eines elastischen Stabes. Dann kommt der kontinuierlich belastete Faden, erst wieder undehnbar und vollkommen biegsam, dann dehnbar, und endlich die elastische Lamelle. Die Untersuchung schreitet weiter zur biegsamen, unausdehnbaren Fläche und ihrem befreiten Gegenstück, der dehnbaren Fläche. Nach einem kurzen Kapitel über den starren Körper (IV), das insofern aus dem Rahmen fällt, als der starre Körper nicht mit der Multiplikatorenmethode, sondern mit der expliziten Darstellung der möglichen Verrückungen gemacht wird, schreitet die Untersuchung im alten Geleise weiter; erst kommt die inkompressible Flüssigkeit, und nachdem so der Begriff des Druckes gewonnen ist (das ist hier das λ), folgt die kompressible Flüssigkeit. Also ein systematischer Gang: zu jedem System wird ein befreites gestellt, und es fehlt nur der Übergang vom starren Körper zum allgemeinen System, d. h. die vollständige Begründung der Spannungsdyade.

Die nun folgende Dynamik entwickelt zunächst ganz allgemeine Prinzipien (Sektion I bis VI). Dann kommt wieder systematisch zuerst der Freie Punkt (Sektion VII). Daran schließen sich in Sektion VIII die einfachen gebundenen Bewegungen eines Punktes. Und hier findet sich sofort wieder die Bemerkung, daß λ die entsprechende Reaktionskraft bedeute (Druck der Stützfläche, Chap. II, Nr. 14, Fadenspannung in Nr. 24.), und zwar begründet mit dem Prinzip der Befreiung. Wie in der Statik kommt jetzt ein Abschnitt, in dem der starre Körper mittels der expliziten Darstellung seiner virtuellen Verschiebungen behandelt wird: aber die Hydrodynamik setzt die Multiplikatorenmethode fort, und dementsprechend kommt zuerst wieder die inkompressible Flüssigkeit, dann erst die kompressible, nachdem der Druck als Flächenkraft gewonnen ist. Der systematische Weg bricht damit ab, den Schluß bilden Noten über verschiedene Gegenstände; bekanntlich hat Lagrange nicht selbst die letzte Hand an die zweite Auflage gelegt.

Lagrange sondert also aus dem Allgemeinbegriff der eingeprägten Kräfte systematisch durch sein Prinzip der Befreiung die Fadenspannung, die Zug-, Schub-, Biegungs- und Torsionsbeanspruchung eines Balkens, den Druck einer Flüssigkeit heraus. Es fehlt die Entwicklung der allgemeinen Spannungsdyade im beliebigen System. Dazu hätte Lagrange nur auch den starren Körper nach der Multiplikatorenmethode zu behandeln brauchen.

Obwohl dies schon G. Piola 1845 (siehe Enzyklopädie IV 23, S. 23 und IV 30, S. 620) getan hat, wollen wir, zur Illustration des Gesagten, es hier kurz darstellen.

Sei $\delta\bar{r}$ mit den Komponenten u, v, w die virtuelle Verschiebung eines Systempunktes. Es ist dann nicht schwer zu beweisen, daß die Bedingungen der Starrheit

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

lauten. Wirken nun auf ein Volumelement dV die eingeprägten Kräfte ξdV, ηdV, ζdV, so verlangt das Prinzip der virtuellen Verschiebungen in der Form der Multiplikatorenmethode

$$\int \Big\{ \xi u + \eta v + \zeta w + X_x \frac{\partial u}{\partial x} + Y_y \frac{\partial v}{\partial y} + Z_z \frac{\partial w}{\partial z} + X_y \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$+ Y_z \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) + Z_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \Big\}\, dV = 0,$$

für alle u, v, w, wobei die $X_x dV$ usw. die erforderlichen 6 Multiplikatoren sind. Umformung mittels partieller Integration ergibt nun

1. die Oberflächenbedingungen

$$X_x \cos(\nu, x) + X_y \cos(\nu, y) + Z_x \cos(\nu, z) = 0$$

usw. Wir haben dabei zunächst angenommen, daß eingeprägte Oberflächenkräfte nicht vorhanden seien. Im Sinne des Lagrangeschen Gedankenganges soll ja die Notwendigkeit der flächenhaft verteilten Kräfte erst dargetan werden. Ist das jetzt geschehen, so kann man hinterher leicht eingeprägte Oberflächenkräfte zulassen.

2. die Gleichungen im Inneren

$$\xi - \frac{\partial X_x}{\partial x} - \frac{\partial X_y}{\partial y} - \frac{\partial Z_x}{\partial z} = 0$$

usw.

Das Befreiungsprinzip sagt jetzt aus, daß für ein ganz beliebiges, freies System dieselben Gleichungen gelten, und daß dabei die X_x, X_y reale Kräfte sind, und zwar nach 1. (genauer gesagt, nach dem entsprechenden Oberflächenintegral, welches eine Arbeit darstellt) flächenhaft verteilte Kräfte, welche durch die physikalische Beschaffenheit des Systems und seine Deformationen eindeutig gegeben sind.

Wie man sieht, ergibt sich das allgemeine Prinzip der Symmetrie der Spannungsdyade von selbst. (Man definiere $Y_x = X_y$, $Z_y = Y_z$, $X_z = Z_x$. Aus 1. folgt dann der Charakter als Dyade.)

Der Lagrangesche Weg erweist sich also als die direkte Umkehrung des ersten Weges. Beide sind gleich allgemein, aber fassen die Mechanik an entgegengesetzten Enden an. Der Lagrangesche Weg geht von sehr allgemeinen Begriffen und Grundsätzen aus und entwickelt daraus erst ihren konkreten Inhalt, der erste Weg stellt den zwar allgemeinen, aber anschaulichen Begriff der Spannung an den Anfang, der bei Lagrange an den Schluß gehört. Dagegen führt der erste Weg erst am Ende zu den Lagrangeschen Idealsystemen und zum Prinzip der virtuellen Arbeiten. Aber beide Wege behandeln die ganze Mechanik nach einheitlichen Gesichtspunkten.[1])

1) Daß Lagrange wohl der erste gewesen ist, dem es gelungen ist, die Hydromechanik mit denselben Methoden wie die Mechanik der Punkte und starren Körper zu behandeln, bemerkt schon Dühring in seiner Geschichte der Mechanik.