Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen sin x + 4 .... sin 2x + ... + 1 n si...

Gronwall, T.H.

in: Periodical issue | Mathematische Annalen - 72 | Periodical
16 page(s) (228 - 243)

Über die Gibbssche Erscheinung und die trigonometrischen Summen $\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \cdots + \frac{1}{n}\sin nx$.

Von

T. H. Gronwall in Chicago (U. S. A.).

§ 1.
Einleitung.

Es sei $f(x)$ eine Funktion, von welcher wir der Einfachheit halber voraussetzen wollen, daß sie für $0 \leqq x \leqq 2\pi$ den Dirichletschen Bedingungen genügt, und $x = a$ eine Unstetigkeitsstelle derselben. Die Gibbssche Erscheinung kommt bekanntlich darauf hinaus, daß die n^{ten} Partialsummen

$$(1)\qquad s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + \cdots + a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

der Fourierschen Reihe

$$(2)\qquad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

in der Nähe von $x = a$ Maxima und Minima besitzen, deren Grenzwerte für $n = \infty$ aus dem Intervall von $f(a-0)$ bis $f(a+0)$ heraustreten. Es ergibt sich diese Tatsache im allgemeinen Fall aus der Betrachtung des Sonderfalles

$$(3)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{2}(\pi - x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu x, \quad 0 < x < 2\pi,$$

und der Maxima und Minima der Partialsummen

$$(4)\qquad \varphi_n(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \cdots + \frac{1}{n} \sin nx.$$

Diese Partialsummen (4) spielen auch eine Hauptrolle in den von Herrn Fejér*) gegebenen Beispielen von stetigen Funktionen, deren

*) L. Fejér, Lebesguesche Konstanten und divergente Fourierreihen, J. f. Math. 138 (1910), S. 22—53.

Fouriersche Reihen an einzelnen Stellen divergieren. Er benutzt dabei hauptsächlich den Satz, daß für jedes reelle x und ganzzahlige n

$$|\varphi_n(x)| < M$$

ist, wo M eine Konstante $\leqq 3 \cdot 6$ bedeutet.*)

In einer späteren Abhandlung bemerkt Herr Fejér**), daß das absolute Maximum von $|\varphi_n(x)|$ wahrscheinlich mit n monoton wächst, und zwar bis zu dem Grenzwert

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx = 1 \cdot 851936 \cdots$$

für $n = \infty$.

Im § 2 der vorliegenden Abhandlung werden mit ganz elementaren Mitteln einige Sätze über die Maxima und Minima von $\varphi_n(x)$ abgeleitet, und insbesondere die Vermutung des Herrn Fejér bestätigt. Der § 3 bringt die schon angedeutete Anwendung dieser Sätze auf die Gibbssche Erscheinung, während im § 4 die Untersuchung mit einer eingehenderen Erörterung der Minima von $\varphi_n(x)$ ihren naturgemäßen Abschluß findet.

§ 2.

Die Maxima und Minima von $\varphi_n(x)$.

Aus der Definition von $\varphi_n(x)$ folgt sogleich, daß

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\varphi_n(0) = \varphi_n(\pi) = 0, \\ &\varphi_n(x) = \varphi_n(x + 2\pi) = -\varphi_n(-x), \end{aligned}$$

sodaß wir die Untersuchung auf das Intervall

$$0 \leqq x < \pi$$

beschränken können. Die Gleichung (4) ergibt ferner

$$(6) \qquad \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = \sum_{\nu=1}^{n} \cos \nu x = \frac{\sin \frac{n}{2} x \cos \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}},$$

*) Die Existenz eines solchen M, jedoch ohne Angabe über seinen numerischen Wert, wurde zuerst von Herrn Kneser bewiesen: Beiträge zur Theorie der Sturm-Liouvilleschen Darstellung willkürlicher Funktionen, Math. Ann. 60 (1905), S. 402—423.

**) L. Fejér, Über gewisse Potenzreihen auf der Konvergenzgrenze, Ber. Ak. München 1910, Nr. 3, S. 1—17.

In der Note: Sur les sommes partielles des séries de Fourier, C. R. 23 mai 1910, zeigt derselbe Verfasser, daß $M < \frac{\pi}{2} + 1 = 2 \cdot 57 \cdots$.

woraus wir sofort schließen, daß $\varphi_n(x)$ zum Maximum wird an den Stellen

$$x = \frac{2m+1}{n+1}\pi, \quad m = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

sowie zum Minimum an den Stellen

$$x = \frac{2m}{n}\pi, \qquad m = 1, 2, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Von diesen Maxima und Minima wollen wir einige Sätze beweisen, deren erster lautet:

Satz 1. *Die einem bestimmten Wert von m entsprechenden Maxima und Minima wachsen beide monoton mit n:*

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{2m+1}{n+2}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right);$$

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{2m}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right).$$

Zum Beweise bemerken wir, daß die Maximumstelle $\frac{2m+1}{n+1}\pi$ von $\varphi_n(x)$ zwischen den aufeinanderfolgenden Minimastellen $\frac{2m}{n}\pi$ und $\frac{2m+2}{n}\pi$ liegt, sowie umgekehrt die Minimumstelle $\frac{2m}{n}\pi$ zwischen den aufeinanderfolgenden Maximastellen $\frac{2m-1}{n+1}\pi$ und $\frac{2m+1}{n+1}\pi$. Ferner ergibt sich aus (4)

$$\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) = \frac{1}{n+1}\sin(n+1)x,$$

sodaß $\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x)$ für $x = \frac{2m+1}{n+1}\pi$ und $x = \frac{2m}{n+1}\pi$. Es ist nun

$$\frac{2m+1}{n+2}\pi < \frac{2m+1}{n+1}\pi < \frac{2m+2}{n+1}\pi,$$

und wie soeben bemerkt, sind die äußeren Glieder dieser Ungleichung eine Maximumstelle bez. die unmittelbar darauffolgende Minimumstelle von $\varphi_{n+1}(x)$; zwischen ihnen nimmt also diese Funktion monoton ab, sodaß

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{2m+1}{n+2}\pi\right) > \varphi_{n+1}\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right) = \varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right).$$

In ähnlicher Weise schließt man aus der Ungleichung

$$\frac{2m-1}{n+1}\pi < \frac{2m}{n+1}\pi < \frac{2m}{n}\pi,$$

deren äußere Glieder eine Maximum- und die unmittelbar darauffolgende Minimumstelle von $\varphi_n(x)$ sind, daß

$$\varphi_{n+1}\left(\frac{2m}{n+1}\pi\right) = \varphi_n\left(\frac{2m}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right).$$

Wir beweisen ferner den

Satz 2. *Für* $0 < x < \pi$ *ist* $\varphi_n(x)$ *stets positiv.*

Es genügt offenbar zu zeigen, daß im betreffenden Intervalle sämtliche Minima von $\varphi_n(x)$ positiv sind. Es sei $\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right)$ ein beliebiges unter diesen; da $\frac{2m}{n}\pi < \pi$, also $2m + 1 \leqq n$ ist, so folgt aus Satz 1:

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) \geqq \varphi_{2m+1}\left(\frac{2m}{2m+1}\pi\right) = \varphi_{2m+1}\left(\pi - \frac{\pi}{2m+1}\right)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{2m+1} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu} \sin \frac{\nu\pi}{2m+1}.$$

Bekanntlich nimmt $\frac{\sin x}{x}$ monoton ab, wenn x von 0 bis π wächst, und daher ist die obige alternierende Reihe positiv, indem ihre Glieder dem absoluten Betrage nach abnehmen.

Satz 3. *Die Maxima von* $\varphi_n(x)$ *bilden eine fallende Reihe:*

$$\varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+3}{n+1}\pi\right), \quad m = 0, 1, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1.$$

Zum Beweise wollen wir zunächst eine Hilfsformel ableiten. Nach (6) ist

$$\varphi_n'(x) - \varphi_n'\left(x + \frac{2\pi}{n+1}\right)$$
$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x + \pi - \frac{\pi}{n+1}\right)\cos\left(\frac{n+1}{2}x + \pi\right)}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)}$$
$$= \frac{\sin\frac{n}{2}x \cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{\sin\left(\frac{n}{2}x - \frac{\pi}{n+1}\right)\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)}$$
$$= \frac{\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)}\left[\sin\frac{n}{2}x \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right) - \sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{n}{2}x - \frac{\pi}{n+1}\right)\right]$$
$$= \frac{\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)}\left[\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{n}{2}x\cos\frac{x}{2}\sin\frac{\pi}{n+1}\right.$$
$$\left. - \sin\frac{x}{2}\sin\frac{n}{2}x\cos\frac{\pi}{n+1} + \sin\frac{x}{2}\cos\frac{n}{2}x\sin\frac{\pi}{n+1}\right]$$
$$= \frac{\cos\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)}\sin\frac{n+1}{2}x\sin\frac{\pi}{n+1}$$
$$= \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}\sin(n+1)x}{2\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{n+1}\right)},$$

oder endlich

$$(7)\qquad \varphi_n'(x) - \varphi_n'\left(x+\frac{2\pi}{n+1}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{n+1}\sin(n+1)x}{\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\left(\frac{\pi}{n+1}+x\right)}.$$

In dieser Gleichung setzen wir $x = \frac{(2m+2)\pi \pm t}{n+1}$ und finden leicht

$$\frac{d}{dt}\left\{\left(\varphi_n\left(\frac{(2m+2)\pi-t}{n+1}\right)-\varphi_n\left(\frac{(2m+4)\pi-t}{n+1}\right)\right)\right.$$
$$\left.-\left(\varphi_n\left(\frac{(2m+2)\pi+t}{n+1}\right)-\varphi_n\left(\frac{(2m+4)\pi+t}{n+1}\right)\right)\right\}$$
$$=\frac{1}{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1}\sin t\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{(2m+3)\pi-t}{n+1}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n+1}-\cos\frac{(2m+3)\pi+t}{n+1}}\right)$$
$$>0 \quad \text{für}\quad 0<t<\pi \quad\text{und}\quad 0<\frac{2m+3}{n+1}\pi<\pi,$$

denn unter diesen Voraussetzungen ist $2m+4 \leqq n+1$ und

$$\cos\frac{\pi}{n+1} > \cos\frac{(2m+3)\pi-t}{n+1} > \cos\frac{(2m+3)\pi+t}{n+1} > -1.$$

Das eingeklammerte Aggregat von Funktionen φ_n wächst infolgedessen monoton mit t für $0 \leqq t \leqq \pi$; für $t=0$ verschwindet es, ist folglich positiv für $t=\pi$, sodaß

$$(8)\qquad \varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right)-\varphi_n\left(\frac{2m+3}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+3}{n+1}\pi\right)-\varphi_n\left(\frac{2m+5}{n+1}\pi\right).$$

Nunmehr sei $\frac{2m+3}{n+1}\pi$ die letzte Maximumstelle im Intervall von 0 bis π; dann ist $\frac{2m+5}{n+1}\pi = \pi + x_0$, wo $0 < x_0 < \pi$. Laut (5) ist

$$\varphi_n(\pi+x_0) = \varphi_n(x_0-\pi) = -\varphi_n(\pi-x_0),$$

sodaß, nach Satz 2, $\varphi_n\left(\frac{2m+5}{n+1}\pi\right)$ negativ ausfällt, und es ergibt sich aus (8)

$$(9)\qquad \varphi_n\left(\frac{2m+1}{n+1}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+3}{n+1}\pi\right)$$

zunächst für $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]-1$, und die wiederholte Anwendung von (8) zeigt, daß (9) für $m = \left[\frac{n-1}{2}\right]-2, \cdots, 1, 0$ gilt, womit unser Satz bewiesen ist.

Wir kommen endlich zu dem in der Einleitung erwähnten

Satz 4. *Für jeden reellen Wert von x ist das absolute Maximum von $|\varphi_n(x)|$ gleich $\varphi_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ und wächst monoton mit n bis zu dem Grenzwert*

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Da nämlich zufolge (5) das absolute Maximum von $|\varphi_n(x)|$ an einer Stelle des Intervalles $0 < x < \pi$ auftritt, so ist es nach Satz 2 unter den Maxima von $\varphi_n(x)$ im genannten Intervall zu suchen. Das größte von diesen gehört aber nach Satz 3 zu $m = 0$, und sein monotones Wachsen mit n folgt aus Satz 1. Der gesuchte Grenzwert ergibt sich aber aus der Identität

$$\varphi_n\left(\frac{\pi}{n+1}\right) = \frac{\pi}{n+1}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n+1}}{\frac{\pi}{n+1}} + \frac{\sin\frac{2\pi}{n+1}}{\frac{2\pi}{n+1}} + \cdots + \frac{\sin\frac{n\pi}{n+1}}{\frac{n\pi}{n+1}}\right).$$

Jetzt gehen wir zur Betrachtung der Gibbsschen Erscheinung über; die etwas umständlichere Untersuchung der Minima von $\varphi_n(x)$, welche wir zu diesem Zwecke nicht gebrauchen, folgt im § 4.

§ 3.

Die Gibbssche Erscheinung.

Es sei $f(x)$ eine Funktion, welche im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$ den Dirichletschen Bedingungen genügt und folglich in diesem Intervalle sich in eine Fouriersche Reihe (2) entwickeln läßt. Um die Unstetigkeitsstelle a von $f(x)$ grenzen wir ein Intervall $\alpha \leqq x \leqq \beta$ ab, welches keine weitere Unstetigkeitsstelle von $f(x)$ enthält. Wir betrachten nun die Kurve C, welche aus folgenden drei Stücken besteht:

Erstes Stück: $y = f(x),\ \alpha \leqq x < a$.

Zweites Stück: die vertikale geradlinige Strecke, welche die beiden Punkte

$$x = a,\ y = f(a-0) + \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$$

und

$$x = a,\ y = f(a+0) - \frac{f(a+0) - f(a-0)}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx\,^{*)}$$

verbindet.

---

*) Es ist $\frac{1}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = -0{\cdot}089490\cdots$; daher ragt die betrachtete Strecke an jedem Endpunkt der Strecke von $x = a,\ y = f(a-0)$ bis $x = a,\ y = f(a+0)$ über diese hinaus und zwar um den gleichen Betrag, nämlich etwa 9% der Länge derselben.

Drittes Stück: $y = f(x), \quad a < x \leqq \beta$.

Um jeden Punkt der Kurve C beschreiben wir einen Kreis mit beliebig kleinem Radius ε; die Gesamtheit aller Punkte, welche dem Inneren wenigstens eines dieser Kreise angehören, bilden eine Punktmenge, welche wir als Umgebung ε der Kurve C bezeichnen.

Indem wir jetzt die Partialsummen (1) der Fourierschen Reihe (2) in Betracht ziehen, besteht die *Gibbssche Erscheinung* darin, *daß sich zu jedem beliebig kleinen* $\varepsilon > 0$ *ein* $n = N(\varepsilon)$ *angeben läßt derart, daß für* $n \geqq N(\varepsilon)$ *sämtliche Kurven*

$$y = s_n(x), \quad \alpha \leqq x \leqq \beta,$$

der Umgebung ε *der Kurve* C *angehören; hierbei läßt sich das zweite Stück von* C *durch keine kürzere vertikale Strecke ersetzen.**)

Zum Beweise setzen wir

$$(10)\qquad \begin{aligned} \varphi(x-a) &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu} \sin \nu(x-a) \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{\nu} \sin \nu a \cos \nu x + \frac{1}{\nu} \cos \nu a \sin \nu x\right) \end{aligned}$$

und bemerken zunächst, daß wegen der Periodizität der rechten Seite von (3)

$$(11)\qquad \begin{aligned} \varphi(x-a) &= \frac{1}{2}(\ \ \pi + a - x) \quad \text{für} \quad a < x < 2\pi + a, \\ \varphi(x-a) &= \frac{1}{2}(-\pi + a - x) \quad \text{für} \quad -2\pi + a < x < a, \end{aligned}$$

sodaß

$$(12)\qquad \begin{aligned} \varphi(-0) &= -\frac{\pi}{2}, \\ \varphi(+0) &= \ \ \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Ferner ist, nach (5) und Satz 4, für die Partialsummen von (10)

$$(13)\qquad -\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx < \varphi_n(x-a) < \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

für jedes reelle x und jedes ganzzahlige positive n, sowie ein $n = N_1(\varepsilon)$ derart wählbar, daß, für alle $n \geqq N_1(\varepsilon)$

*) In der Abhandlung des Herrn Bôcher, Introduction to the theory of Fourier's series, Annals of mathematics (2) 7 (1906), S. 81—152, wird, allerdings unter der Voraussetzung, daß $f(x)$ außer in den Unstetigkeitspunkten eine den Dirichletschen Bedingungen genügende Ableitung besitzt, die Gibbssche Erscheinung durch Abschätzung der Partialsummen (4) mittels des Dirichletschen Integrals abgeleitet.

$$(14)\quad \begin{aligned} \varphi_n\left(\left(a-\frac{\pi}{n+1}\right)-a\right) &< -\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \frac{\pi\varepsilon}{4\,|f(a+0)-f(a-0)|}, \\ \varphi_n\left(\left(a+\frac{\pi}{n+1}\right)-a\right) &> \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi\varepsilon}{4\,|f(a+0)-f(a-0)|}. \end{aligned}$$

Wir setzen endlich

$$(15)\qquad f(x) = \frac{f(a-0)+f(a+0)}{2} + \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\varphi(x-a) + f_1(x);$$

dann ist nach (12) $f_1(a-0) = f_1(a+0) = 0$, und also $f_1(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq \beta$ stetig, sodaß für ein genügend kleines, positives $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$,

$$|f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{für} \quad a-\delta \leqq x \leqq a+\delta.$$

Offenbar genügt $f_1(x)$ den Dirichletschen Bedingungen im Intervalle $0 \leqq x \leqq 2\pi$*); $f_1(x)$ läßt sich demnach in eine, im Intervalle $\alpha \leqq x \leqq \beta$ *gleichmäßig***) konvergente Fouriersche Reihe entwickeln, deren n^{te} Partialsumme $s_n'(x)$ sei. Dann läßt sich ein $n = N_2(\varepsilon)$ derart angeben, daß für alle $n \geqq N_2(\varepsilon)$

$$|s_n'(x) - f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{8} \quad \text{für} \quad \alpha \leqq x \leqq \beta$$

und folglich

$$(16)\quad |s_n'(x)| \leqq |s_n'(x)-f_1(x)| + |f_1(x)| < \frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8} = \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für } a-\delta \leqq x \leqq a+\delta.$$

Es ist ferner nach (15)

$$(17)\qquad s_n(x) = \frac{f(a-0)+f(a+0)}{2} + \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\varphi_n(x-a) + s_n'(x),$$

welche Formel wir auch schreiben können

$$\begin{aligned} s_n(x) = f(a-0) &+ \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx\right) \\ &+ \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx + \varphi_n(x-a)\right) + s_n'(x), \end{aligned}$$

oder da

---

*) Denn $f(x)$ und $\varphi(x-a)$ lassen sich, weil den Dirichletschen Bedingungen genügend, als Differenz je zweier monotoner Funktionen darstellen, folglich nach (15) auch $f_1(x)$, woraus die Behauptung folgt.

**) Nach einem bekannten Satze von E. Heine, J. f. Math. 71 (1870), S. 357. Vgl. E. Picard, Traité d'analyse, 2. Aufl., Bd. 1, S. 256.

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

$$(18)\quad \begin{aligned} s_n(x) &= f(a-0) + \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &+ \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\left(\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx + \varphi_n(x-a)\right) + s_n'(x). \end{aligned}$$

Ähnlich erhalten wir aus (17) auch

$$(19)\quad \begin{aligned} s_n(x) &= f(a+0) - \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\int_\pi^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx \\ &+ \frac{f(a+0)-f(a-0)}{\pi}\left(\varphi_n(x-a) - \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx\right) + s_n'(x). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (18) und (19) zeigen nun, daß, wenn n gleichzeitig größer oder gleich $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$ und $\frac{\pi}{\delta} - 1$ ist, sämtliche Kurven $y = s_n(x)$ wegen (13) und (16) für $a - \delta \leqq x \leqq a + \delta$ in der Umgebung ε des zweiten Stückes der Kurve C liegen, sowie daß, wegen (14), ihre Ordinaten für $x = a \pm \frac{\pi}{n+1}$ um weniger als $\frac{\varepsilon}{2}$ von den Endpunktsordinaten der genannten Strecke abweichen. Um noch die beiden Intervalle $\alpha \leqq x \leqq a - \delta$ und $a + \delta \leqq x \leqq \beta$ zu erledigen, bemerken wir, daß in diesen Intervallen, nach dem erwähnten Satze von Heine, die Fouriersche Reihe (2) gleichmäßig konvergiert; es läßt sich also ein $n = N_3(\varepsilon)$ angeben derart, daß für $n \geqq N_3(\varepsilon)$ sämtliche Kurven $y = s_n(x)$ für $\alpha \leqq x \leqq a - \delta$ bez. $a + \delta \leqq x \leqq \beta$ der Umgebung ε des ersten bez. dritten Stückes von C angehören. Indem wir $N(\varepsilon)$ dem Größten unter $N_1(\varepsilon)$, $N_2(\varepsilon)$, $N_3(\varepsilon)$, $\frac{\pi}{\delta} - 1$ gleichsetzen, ist folglich unsere Behauptung erwiesen.

§ 4.

Weitere Untersuchung der Minima von $\varphi_n(x)$.

Um nunmehr zur Untersuchung der Minima von $\varphi_n(x)$ zurückzukehren, schreiben wir in (7) $n - 1$ statt n:

$$\varphi_{n-1}'(x) - \varphi_{n-1}'\left(x + \frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{n}\sin nx}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n} + x\right)}.$$

Aus der Identität

$$\varphi_n'(x) - \varphi_n'\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) = \varphi_{n-1}'(x) + \cos nx - \varphi_{n-1}'\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) - \cos n\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$= \varphi_{n-1}'(x) - \varphi_{n-1}'\left(x+\frac{2\pi}{n}\right)$$

ergibt sich also

$$\varphi_n'(x) - \varphi_n'\left(x+\frac{2\pi}{n}\right) = \frac{\sin\frac{\pi}{n}\sin nx}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n}+x\right)}, \tag{20}$$

welche Gleichung wir von $x = \frac{2m\pi}{n}$ bis $x = \frac{2m+2}{n}\pi$ integrieren:*)

$$\varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \left(\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+4}{n}\pi\right)\right)$$

$$= -\quad \sin\frac{\pi}{n}\int_{\frac{2m}{n}}^{\frac{2m+2}{n}\pi}\frac{\sin nx\,dx}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\left(\frac{\pi}{n}+x\right)}$$

$$= -\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\int_0^{2\pi}\frac{\sin x\,dx}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{(2m+1)\pi+x}{n}}$$

$$= -\frac{1}{n}\sin\frac{\pi}{n}\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{(2m+2)\pi-x}{n}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{n} - \cos\frac{(2m+2)\pi+x}{n}}\right)\sin x\,dx.$$

Wenn $0 < \frac{2m+2}{n}\pi < \pi$, so ist $2m+3 \leqq n$ und

$$\cos\frac{\pi}{n} > \cos\frac{(2m+2)\pi-x}{n} > \cos\frac{(2m+2)\pi+x}{n} > -1 \quad \text{für} \quad 0 < x < \pi.$$

Es ist demnach das Integral positiv und folglich

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) < \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+4}{n}\pi\right). \tag{21}$$

---

*) Es läßt sich auch hier, wie bei Satz 3, die Beweisführung durch Umgehung der Integration elementarer gestalten; dies hätte jedoch wenig Zweck, da wir ohnehin die nicht mehr elementar zu nennende Eulersche Summenformel bald heranzuziehen haben.

Wenn also die Differenz $\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right)$ für einen bestimmten Wert von m positiv ist, so ist sie es auch für jeden größeren Wert von m bis $\left[\frac{n-1}{2}\right] - 1$. Zwei Fälle sind demnach möglich: entweder bilden die Minima eine fallende Reihe für $m = 1, 2, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$ oder es existiert ein größtes Minimum $\varphi_n\left(\frac{2m_0}{n}\pi\right)$ derart, daß die Minima für $m = 1, 2, \cdots, m_0$ eine steigende, für $m = m_0, m_0+1, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right]$ aber eine fallende Reihe bilden. Näheren Aufschluß hierüber gibt der jetzt zu beweisende

Satz 5. *Für $n \leqq 42$ bilden die Minima von $\varphi_n(x)$ im Intervalle $0 < x < \pi$ eine fallende Reihe. Von $n = 43$ an existiert aber eine ganze Zahl m_0 derart, daß*

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) < \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \cdots, m_0 - 1,$$

dagegen

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{für} \quad m = m_0, m_0+1, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right] - 1.$$

Dieses m_0 wird durch die Ungleichungen

$$\left[\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\right] \leqq m_0 \leqq \left[\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\right] + 1$$

begrenzt,) und das größte Minimum $\varphi_n\left(\frac{2m_0}{n}\pi\right)$ ist asymptotisch gleich*

$$\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2n}} + \cdots.$$

Es ist nämlich

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{1}{\mu} \sin\frac{2\mu m}{n}\pi = \sum_{\mu=0}^{n} \frac{1}{\mu} \sin\frac{2\mu m}{n}\pi - \frac{2m\pi}{n},$$

und auf diesen Ausdruck wollen wir die Eulersche Summenformel anwenden. Dieselbe lautet:

$$\sum_{\mu=0}^{n} f(a+\mu b) = \int_0^n f(a+xb)\,dx + \frac{1}{2}(f(a)+f(a+nb))$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{p} \frac{(-1)^{\nu-1}B_\nu}{(2\nu)!}\left(f^{(2\nu-1)}(a+nb) - f^{(2\nu-1)}(a)\right)b^{2\nu-1} + R_{p+1},$$

mit dem Restglied

$$R_{p+1} = \Theta \cdot B_{p+1}\frac{b^{2p+1}}{(2p+2)!}M_{2p+2}, \qquad -1 < \Theta < 1,$$

wo $M_{2p+2} \geqq |f^{(2p+2)}(x)|$ für $a \leqq x \leqq a + nb$.

*) Engere Grenzen werden durch Gl. (27) und (28) gegeben.

In obiger Formel setzen wir jetzt $a=0$, $b=\frac{2m}{n}\pi$, $f(x)=\frac{\sin x}{x}$. Es wird

$$\int_0^n f(a+xb)\,dx = \int_0^n \frac{\sin\frac{2mx}{n}\pi}{\frac{2mx}{n}\pi}\,dx = \frac{n}{2m\pi}\int_0^{2m\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

und

$$f^{(2\nu-1)}(a+nb)-f^{(2\nu-1)}(a)=\left(\frac{d^{2\nu-1}}{dx^{2\nu-1}}\,\frac{\sin x}{x}\right)_0^{2m\pi}.$$

Die Funktion $\frac{d^{2\nu-1}}{dx^{2\nu-1}}\,\frac{\sin x}{x}$ ist eine ganze, ungerade Funktion von x, weshalb sie für $x=0$ verschwindet; ferner ist nach der Leibnizschen Formel

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\,\frac{\sin x}{x}=\sum_{\alpha=0}^{\lambda}\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-\alpha+1)}{\alpha!}\cdot(-1)^\alpha\,\frac{\alpha!}{x^{\alpha+1}}\sin\left(x+(\lambda-\alpha)\frac{\pi}{2}\right),$$

sodaß

$$\left(\frac{d^{2\nu-1}}{dx^{2\nu-1}}\,\frac{\sin x}{x}\right)_0^{2m\pi}=\sum_{\alpha=0}^{2\nu-1}\frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\cdots(2\nu-\alpha)}{(2m\pi)^{\alpha+1}}\,(-1)^{\alpha+\nu+1}\cos\frac{\alpha\pi}{2}$$

$$=\sum_{\alpha=0}^{\nu-1}\frac{(2\nu-1)(2\nu-2)\cdots(2\nu-2\alpha)}{(2m\pi)^{2\alpha+1}}\cdot(-1)^{\alpha+\nu+1}.$$

Zur Abschätzung des Restgliedes bemerken wir, daß

$$\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\,\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x^{\lambda+1}}\int_0^x x^\lambda\sin\left(x+\frac{\lambda+1}{2}\pi\right)dx,$$

wie durch teilweise Integration und Schluß von λ auf $\lambda+1$ ohne weiteres ersichtlich ist. Diese Formel ergibt für jedes reelle $x \neq 0$

$$\left|\frac{d^\lambda}{dx^\lambda}\,\frac{\sin x}{x}\right| \leqq \frac{1}{|x|^{\lambda+1}}\int_0^{|x|}|x|^\lambda\left|\sin\left(x+\frac{\lambda+1}{2}\,x\right)\right|dx$$

$$<\frac{1}{|x|^{\lambda+1}}\int_0^{|x|}x^\lambda dx=\frac{1}{\lambda+1},$$

sodaß wir für M_{2p+2} einfach $\frac{1}{2p+3}$ setzen können.

Dies alles in die Eulersche Summenformel eingetragen, ergibt nach Multiplikation mit $\frac{2m}{n}\pi$:

$$\varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) = \int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{m\pi}{n}$$

$$(22) \qquad + \sum_{\nu=1}^{p} \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^\alpha B_\nu}{(2\nu)!\, n^{2\nu}} \cdot (2\nu-1)(2\nu-2)\cdots(2\nu-2\alpha)\cdot(2m\pi)^{2\nu-2\alpha-1}$$

$$+ \Theta \cdot \frac{B_{p+1}}{(2p+3)!} \cdot \left(\frac{2m\pi}{n}\right)^{2p+2}, \qquad -1 < \Theta < 1.$$

Zunächst setzen wir in dieser Formel $p = 2$, $m = 1$ und $p = 2$, $m = 2$; unter Berücksichtigung der Werte*)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1\cdot 418158\cdots,$$

$$\int_0^{4\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = 1\cdot 492164\cdots$$

lehrt eine einfache numerische Rechnung, daß

$$\varphi_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{4\pi}{n}\right) > 0 \quad \text{für} \quad n \leqq 42,$$

$$\varphi_n\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \varphi_n\left(\frac{4\pi}{n}\right) < 0 \quad \text{für} \quad n \geqq 43.$$

Die Existenz der ganzen Zahl m_0 für $n \geqq 43$ folgt schon aus den an Formel (21) geknüpften Betrachtungen, und um uns zunächst über die Größenordnung von m_0 in bezug auf n Aufschluß zu verschaffen, setzen wir in (22) $p = 1$ und bilden die Differenz

$$(23)\ \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) = \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} + \frac{\pi^4}{225 n^4}(\Theta_1 (m+1)^4 - \Theta_2 m^4),$$

$$-1 < \Theta_1,\ \Theta_2 < 1.$$

Es ist weiter

$$\int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2m\pi + x}\,dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(2m\pi + x)((2m+1)\pi + x)},$$

woraus sofort folgt, daß

$$\frac{1}{\pi(m+1)(2m+1)} < \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{\pi m(2m+1)},$$

---

*) Entnommen aus: S. A. Corey, The evaluation of $\int_0^x \frac{\sin mx}{x}\,dx$, Am. Math. Monthly 13 (1906), S. 12—13.

und a fortiori

$$(24)\qquad \frac{1}{2\pi(m+1)^2} < \int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx < \frac{1}{2\pi m^2} - \frac{1}{4\pi m^3} + \frac{1}{8\pi m^4}.$$

Aus (23) und (24) folgt, daß

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \frac{1}{2\pi(m+1)^2} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} - \frac{2\pi^4(m+1)^4}{225n^4},$$

sodaß, für $m < \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} - 1$,

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \frac{\pi}{6n^2} - \frac{2\pi^4}{225n^4}\cdot\frac{4n^2}{16\pi^4} = \frac{\pi}{6n^2}\left(1 - \frac{3}{225\pi}\right) > 0.$$

Andererseits ist nach (23) und (24), und infolge $(m+1)^4 \leqq 16m^4$

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) < \frac{1}{2\pi m^2} - \frac{1}{4\pi m^3} + \frac{1}{8\pi m^4} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} + \frac{17\pi^4 m^4}{225n^4},$$

sodaß, für $\frac{\sqrt{2n}}{2\pi} < m < \frac{\sqrt{n}}{\pi}$,

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) - \varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) < \frac{\pi}{n} - \frac{\pi^2}{4n^{\frac{3}{2}}} + \frac{\pi^3}{2n^2} - \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{6n^2} + \frac{17}{225n^2}$$

$$= -\frac{\pi^2}{4n^{\frac{3}{2}}}\left(1 - \left(2\pi + \frac{2}{3\pi} + \frac{68}{225\pi^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < 0$$

für $n \geqq 43$.

Es ist demnach

$$\varphi_n\left(\frac{2m\pi}{n}\right) < \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{für} \quad m = 1, 2, \cdots, \left[\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\right] - 1,$$

sowie

$$\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right) > \varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right) \quad \text{für} \quad m = \left[\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}\right] + 1, \cdots, \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

und folglich liegt m_0 zwischen den in Satz 5 angegebenen Grenzen. Wenn wir versuchen, eine asymptotische Reihe für m_0 herzustellen, so muß demnach das Hauptglied gleich $\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}$ sein. Um weitere Glieder zu gewinnen, bemerken wir, daß

$$\int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{(2m+1)\pi - x}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2k} \frac{1}{(2m+1)^\nu \pi^\nu} \int_{-\pi}^{\pi} x^{\nu-1} \sin x\,dx + \frac{1}{(2m+1)^{2k}\pi^{2k}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^{2k}\sin x}{(2m+1)\pi - x}\,dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{2k} \frac{1+(-1)^\nu}{(2m+1)^\nu \pi^\nu} \int_0^{\pi} x^{\nu-1} \sin x\,dx + \frac{1}{(2m+1)^{2k}\pi^{2k}} \int_0^{\pi} \frac{2x^{2k+1}\sin x}{(2m+1)^2\pi^2 - x^2}\,dx.$$

Das letzte Integral ist kleiner als

$$\frac{2\pi^{2k}}{(2m+1)^2\pi^2-\pi^2}\int_0^\pi x\sin x\,dx=\frac{2\pi^{2k-1}}{(2m+1)^2-1}<\frac{\pi^{2k}}{(2m+1)^2};$$

indem wir ferner

$$c_\nu=\int_0^\pi x^{2\nu-1}\sin x\,dx$$

setzen, wird

$$c_1=\pi,$$
$$c_\nu=\pi^{2\nu-1}-(2\nu-1)(2\nu-2)c_{\nu-1},$$

und wir erhalten endlich

$$\int_{2m\pi}^{(2m+2)\pi}\frac{\sin x}{x}\,dx=\sum_{\nu=1}^{k}\frac{2c_\nu}{(2m+1)^{2\nu}\pi^{2\nu}}+\frac{\Theta}{(2m+1)^{2k+2}},\qquad 0<\Theta<1.$$

Mit $p=2$ bilden wir aus (22) die Differenz

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right)-\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right),$$

ersetzen das auftretende Integral durch den Ausdruck (25) mit $k=2$, und setzen

(26) $$(2m+1)^2\pi^2=2n+h.$$

Dann kommt nach kurzer Zwischenrechnung

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right)-\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right)&=\frac{2\pi}{2n+h}+\frac{2\pi^2-12\pi}{(2n+h)^2}+\frac{\Theta\pi^6}{(2n+h)^3}\\&-\frac{\pi}{n}+\frac{\pi}{6n^2}+\frac{\pi}{360n^4}(3(2n+h)+\pi^2-3)\\&+\frac{\Theta_1}{4320}\,\frac{(2n+h)^3}{n^6},\qquad\begin{array}{r}0<\Theta<1,\\-1<\Theta_1<1.\end{array}\end{aligned}$$

Durch Entwicklung nach Potenzen von h sieht man leicht die Existenz einer Konstante A ein, derart, daß

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right)-\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right)>0$$

wird für

$$h\leqq\frac{3\pi-17}{3}-\frac{A}{n},$$

d. h. nach (26) für

(27) $$m\leqq\frac{\sqrt{2n}}{2\pi}-\frac{1}{2}-\frac{17-3\pi}{12\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2n}}-\frac{A_1}{2n\sqrt{2n}},$$

wo A_1 eine passend gewählte Konstante ist, sowie daß

$$\varphi_n\left(\frac{2m+2}{n}\pi\right)-\varphi_n\left(\frac{2m}{n}\pi\right)<0$$

wird für

$$h \geqq \frac{3\pi - 17}{3} + \frac{A}{n},$$

d. h. nach (26) für

(28) $$m \geqq \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} - \frac{1}{2} - \frac{17 - 3\pi}{12\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{A}{2n\sqrt{2n}}.$$

Die den rechten Seiten von (27) und (28) gemeinschaftlichen Glieder bilden offenbar den Anfang der asymptotischen Reihe für m_0, und das Verfahren läßt sich, abgesehen von den rasch wachsenden Rechnungsschwierigkeiten, beliebig weit fortsetzen.

Um zuletzt noch den asymptotischen Ausdruck für das größte Minimum abzuleiten, gehen wir aus von der Gleichung

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \int_{2m\pi}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

aus welcher durch wiederholte teilweise Integration folgt

$$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{(2m\pi)^{2\nu+1}} + (-1)^k (2k+1)! \int_{2m\pi}^{\infty} \frac{\cos x}{x^{2k+2}}\, dx,$$

und durch geeignete Abschätzung des letzten Integrals

(29) $$\int_0^{2m\pi} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{(-1)^\nu (2\nu)!}{(2m\pi)^{2\nu+1}} + \frac{(-1)^{k-1}\Theta \cdot (2k)!}{(2m\pi)^{2k+1}}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Indem wir dieses für $k = 2$ in die Formel (22) mit $p = 2$ eintragen, und in dem Resultat $\dot{m} = m_0 = \frac{\sqrt{2n}}{2\pi} + \varepsilon$ setzen, wo nach dem früher Bewiesenen $-1 < \varepsilon < 1$ ist, finden wir sofort

(30) $$\varphi_n\left(\frac{2m_0}{\pi}\pi\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\sqrt{2n}} + \frac{\delta_n}{n},$$

wo δ_n für alle n beschränkt ist.

Chicago, Ill., den 12. April 1911.