Das gruppentheoretische Fundament der Tensorrechnung.

Von

H. Weyl, Zürich.

Vorgelegt von C. Runge in der Sitzung vom 21. November 1924.

Im Koordinatenraum der x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ betrachten wir die Gruppe $\mathfrak{G}$ der homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1. Die Tensoren νter Stufe in jenem Raum, welche vorgegebenen linearen Symmetriebedingungen genügen, bilden ihrerseits, wenn sie N unabhängige Komponenten besitzen, eine lineare Mannigfaltigkeit von N Dimensionen; unter dem Einfluß der Gruppe $\mathfrak{G}$ erfährt sie eine zu $\mathfrak{G}$ isomorphe Gruppe Γ homogener linearer Transformationen. Und das wahre mathematische Fundament der Tensorrechnung scheint mir der Satz zu sein, daß auf diese Weise jede zu $\mathfrak{G}$ isomorphe, linear-homogene Gruppe Γ jede „Darstellung von $\mathfrak{G}$" erhalten wird. Zur Kennzeichnung einer bestimmten Größenart im Koordinatenraum gehören im allgemeinen außer der Stufenzahl Symmetrieforderungen. Einen Überblick über die möglichen Symmetriecharaktere von Tensoren νter Stufe gewinnt man leicht auf Grund der namentlich von Frobenius entwickelten Darstellungstheorie für die symmetrische Vertauschungsgruppe S_ν von ν Dingen, wie ich kürzlich gezeigt habe[1]). Einen Symmetriecharakter nenne ich irreduzibel, die zugehörige Größenart einfach, wenn jede weitere hinzugefügte Symmetrieforderung der Größe keine Wertmöglichkeit außer 0 offen läßt. Die Tensoren jeden Symmetriecharakters lassen sich additiv aus unabhängigen Bestandteilen zusammensetzen, welche in diesem Sinne einfache Größen sind. Den irreduziblen Symmetrieklassen der Tensoren entsprechen die irreduziblen Darstellungen Γ von $\mathfrak{G}$.

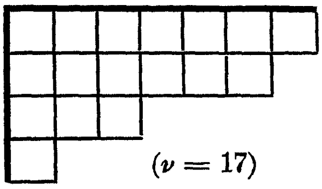
Führt man die kontinuierlichen Gruppen mit Lie auf ihre infinitesimalen Operationen zurück, so formuliert sich das Dar-

1) Rend. Circ. Mat. Palermo 48 (1924), p. 29.

stellungsproblem allgemein folgendermaßen: die Elemente einer inf. Gruppe bilden eine lineare Vektormannigfaltigkeit, innerhalb deren eine distributive „Kommutator-Multiplikation" $[ab]$ erklärt ist, welche den Rechenregeln genügt:

$$[ba] = -[ab]; \quad [[ab]c] + [[bc]a] + [[ca]b] = 0.$$

Sind die Elemente Matrizen, so ist $[ab] = ab - ba$ zu setzen. Es soll jedem Element a einer gegebenen inf. Gruppe eine Matrix A so zugeordnet werden: $a \to A$, daß allgemein auf Grund von $a \to A$, $b \to B$ den Elementen λa (λ eine Zahl), $a + b$, $[ab]$ die Matrizen λA, $A + B$, $[AB]$ korrespondieren. Es handelt sich also um reine Algebra. Die zu $\mathfrak{G}$ gehörige inf. Gruppe $\mathfrak{g}$ besteht insbesondere aus allen Matrizen von der Spur 0. E. Cartan hat in einer tiefsinnigen Arbeit aus dem Jahre 1913 im wesentlichen alle irreduziblen Darstellungen einer beliebigen, in abstracto gegebenen inf. Gruppe bestimmen gelehrt[1]). Für $\mathfrak{g}$ gewinnt er in der Tat lauter Gruppen Γ, die angeben, wie sich die Tensoren bestimmter Symmetrieklassen transformieren. Man ordne nämlich die Ziffern von 1 bis ν in ein Schema wie das nebenstehende ein, das durchgehende Horizontal- und Vertikalreihen aufweist. Es sei $\mathfrak{P}(\mathfrak{Q})$ die Gruppe derjenigen Permutationen $P(Q)$, welche jeweils nur die Ziffern der Horizontalreihen (Vertikalreihen) untereinander vertauschen. Auf den willkürlichen Tensor νter Stufe f übe man die sämtlichen Permutationen PQ des Komplexes $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ aus und addiere die so erhaltenen Tensoren, wobei ein Glied das Vorzeichen $+$ oder $-$ bekommt, je nachdem Q eine gerade oder eine ungerade Permutation ist; was so entsteht, durchläuft bei frei veränderlichem f die Tensoren einer einfachen Symmetrieklasse. Auf diesem Wege sind schon früher von A. Young und G. Frobenius die „charakteristischen Einheiten" der symmetrischen Gruppe und damit deren Gruppencharaktere konstruiert worden[2]). Cartan macht auf diesen Zusammenhang nicht aufmerksam, der, wie ich glaube, die ganze Sachlage erst ins rechte Licht rückt. Bei gegebener Stufenzahl ν erhält man hier genau soviele inäquivalente irreduzible Darstellungen Γ, als es verschiedene Klassen konjugierter Elemente



$(\nu = 17)$

1) Bull. Soc. math. de France **41**, p. 53.

2) Young, Proc. Lond. Math. Soc. **33** (1901), p. 97; **34** (1902), p. 361. Frobenius, Sitzungsber. Preuß. Ak. 1903, p. 328 (auch schon 1900, p. 516). Vgl. ferner: J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin 1924, Kap. VII.

in der symmetrischen Gruppe S_ν gibt; ihre Anzahl ist gleich der Anzahl der verschiedenen Schemata, d. h. der additiven Zerlegungen von ν in positive Summanden, oder gleich der Anzahl der Lösungen der Gleichung

$$1.p_1 + 2.p_2 + \cdots = \nu \tag{1}$$

in nicht-negativen ganzen Zahlen $p_1, p_2, \ldots$. Nur wenn $n < \nu$ ist, liefern diejenigen Schemata keine einfache Größe (sondern lediglich 0), in denen Vertikalstollen von einer Länge $> n$ auftreten (ausgeschlossene Schemata); die Gleichung (1) muß ersetzt werden durch

$$1.p_1 + 2.p_2 + \cdots + n.p_n = \nu. \tag{2}$$

Zwei Symmetriecharaktere sind als äquivalent anzusehen, welche im Sinne meiner oben zitierten Note die gleiche Ordnung $(h, h', \ldots)$ besitzen[1]). Es existieren soviele inäquivalente irreduzible Symmetriecharaktere, als die Anzahl der Lösungen von (2) in nichtnegativen ganzen Zahlen p_i beträgt. Äquivalenten Symmetriecharakteren entsprechen äquivalente Darstellungen von $\mathfrak{G}$, und umgekehrt.

Die Aufgabe, alle Darstellungen von $\mathfrak{G}$, nicht bloß die irreduziblen, zu finden, wurde schon vor Cartan von Herrn I. Schur in seiner Dissertation (Berlin 1901) behandelt. Er verwendet die kontinuierliche Gruppe selbst, nicht die zugehörige infinitesimale; der Zusammenhang mit den Darstellungen der endlichen Gruppe S_ν tritt direkt hervor. Aber hier wird eine andere wesentliche Einschränkung gemacht: daß nämlich die Elemente der darstellenden Matrix ganze rationale Funktionen von denen der dargestellten Matrix (a_{ik}) sind. Unser Haupttheorem besagt, daß seine Resultate auch dann vollständig bleiben, wenn jene Einschänkung fallen gelassen wird; vorausgesetzt natürlich, daß man die Gruppe $\mathfrak{G}$ — und nicht wie Herr Schur selber die Gruppe aller homogenen linearen Transformationen ohne die Nebenbedingung $|a_{ik}| = 1$ — zugrunde legt! Nach dem entscheidenden Schritt von Herrn Cartan genügt dazu der Nachweis, daß jede Darstellung von $\mathfrak{G}$ voll reduzibel ist. Das läßt sich aber einsehen mit Hülfe der Integrationsmethode von Hurwitz, die neuerdings Herr Schur zu

1) In dem Ordnungssymbol entspricht jede Zahl $h, h', \ldots$ einem der oben erwähnten Schemata (oder einem Gruppencharakter von S_ν); es sind hierbei, wenn $n < \nu$ ist, natürlich diejenigen Zahlen h fortzulassen, welche zu den ausgeschlossenen Schemata gehören.

ähnlichen Zwecken herangezogen hat[1]). Ich gehe aus von der inf. Gruppe $\mathfrak{g}$ (in n Dimensionen) und ihrer Darstellung γ (in N Dimensionen). Nach dem Grundgedanken von Hurwitz betrachtet man innerhalb $\mathfrak{G}$ zunächst nur die Gruppe $\mathfrak{G}_u$ der unitären Transformationen von der Determinante 1. Die zugehörige inf. Gruppe $\mathfrak{g}_u$ besteht aus allen Matrizen (α_{ik}), für welche

$$\alpha_{ik} + \bar{\alpha}_{ki} = 0, \quad \sum_i \alpha_{ii} = 0$$

ist. Aus den Operationen der inf. Gruppe γ_u, welche innerhalb γ dem Ausschnitt $\mathfrak{g}_u$ aus $\mathfrak{g}$ entspricht, erhält man nach Lie eine Darstellung Γ_u der ganzen kontinuierlichen Gruppe $\mathfrak{G}_u$. Doch bleibt zunächst fraglich, ob Γ_u die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}_u$ einfach oder mehrfach, vielleicht unendlich-vielfach bedeckt; im letzten Fall würde die Hurwitz'sche Methode versagen, da dann Γ_u kein geschlossenes Gebilde wäre. Ich behaupte aber, daß die erste Alternative zutrifft; und zwar, weil sich in der geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}_u$ jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen läßt. Den Beweis dafür werde ich sogleich andeuten. Man verfährt nun so[2]): auf die Hermite'sche Einheitsform im N dimensionalen Raum der Gruppe Γ wendet man alle Transformationen von Γ_u an und addiert (d. h. integriert unter Verwendung der natürlichen Volumenmessung, die auf $\mathfrak{G}_u$ wie auf jeder Gruppenmannigfaltigkeit besteht); so gewinnt man eine definite Hermite'sche Form, die invariant ist gegenüber allen Operationen von Γ_u. Infolgedessen ist γ_u voll reduzibel. Dann aber auch γ; denn die Elemente der willkürlichen Matrix von γ sind Linearformen der α_{ik}, und eine solche verschwindet identisch in den Variablen α_{ik}, falls sie unter der Einschränkung $\alpha_{ki} = -\bar{\alpha}_{ik}$ identisch verschwindet.

Die Analysis situs spielt hier eine entscheidende Rolle; das eigentliche Hindernis für die universelle Anwendung der Hurwitz'schen Methode (die zu dem durchaus falschen Satz führen würde, daß alle linearen Gruppen voll reduzibel sind), liegt auf topologischem Gebiet: die Ungeschlossenheit der meisten Gruppenmannigfaltigkeiten. Um unsern topologischen Satz über die Gruppe $\mathfrak{G}_u$ zu beweisen, stelle ich eine beliebige unitäre Matrix U von der Determinante 1 in der Gestalt dar: $A^{-1}EA$. Darin ist A eine Matrix derselben Gruppe $\mathfrak{G}_u$ und E eine Diagonalmatrix, auf deren

---

1) Hurwitz, Gött. Nachr. 1897, p. 71. I. Schur, Sitzungsber. d. Preuß. Ak. 1924, p. 189.

2) Vergl. Schur, a. a. O., p. 198.

Hauptdiagonale lauter Zahlen $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ vom absoluten Betrag 1 stehen. Das bedeutet: ich führe durch die unitäre Transformation A ein neues Koordinatensystem $e_1, \ldots, e_n$ ein, in welchem U die Normalform E besitzt. Das Produkt $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ ist $= 1$. Eine geschlossene Kurve in $\mathfrak{G}_u$ liegt vor, wenn $U = U_\tau$ stetig und periodisch mit der Periode 1 von einem reellen (Zeit-)Parameter τ abhängt. Wende ich jene Darstellung auf U_τ an, so wird das nicht-geordnete System der charakteristischen Wurzeln $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ ebenfalls stetig von τ abhängen. Das Gleiche gilt für $A = A_\tau$ nur, solange die ε_i alle voneinander verschieden sind (die Numerierung kann und muß in einem solchen Zeitintervall so eingerichtet werden, daß jede Wurzel ε_i für sich stetig von τ abhängt). Ich darf annehmen, daß Gleichheit mehrerer ε_i nur in endlich vielen Augenblicken eintritt, und dann jeweils nur zwei der charakteristischen Wurzeln einander gleich werden. Ist in einem Moment $\tau = \tau_0$ z. B. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so wird in der Umgebung dieses Moments die von den beiden Vektoren e_1, e_2 aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen stetig von τ abhängen. Ich werde nun die Variation der Kurve, welche U_τ beschreibt, zunächst so durchführen, daß A_τ überhaupt nicht davon betroffen wird, sondern nur das Größensystem $\varepsilon_i(\tau)$ außer von τ stetig von dem Variationsparameter abhängig wird. Sorge ich dafür, daß eine Gleichung wie $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, wenn sie auf der Ausgangskurve im Kurvenpunkte $\tau = \tau_0$ besteht, während der Variation nicht aufhört, für $\tau = \tau_0$ gültig zu bleiben, so wird eine stetige Variation der Ausgangskurve zustande kommen. Es fragt sich, ob ich auf diese Weise die Überführung $\varepsilon_i(\tau) \to 1$ erzwingen kann. Ich setze $\varepsilon_i = e^{2\pi\sigma_i\sqrt{-1}}$. Die σ_i kommen nur mod. 1 in Frage und abgesehen von ihrer Reihenfolge; im Rahmen dieser Unbestimmtheit ist eine einzige Festlegung möglich, welche den Bedingungen

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \cdots + \sigma_n = 0; \quad \sigma_1 \leqq \sigma_2 \leqq \cdots \leqq \sigma_n, \quad \sigma_n - \sigma_1 \leqq 1 \tag{3}$$

genügt. Deuten wir die σ als affine Koordinaten in einem $(n-1)$-dimensionalen Raum, welche die Gleichung (3) identisch erfüllen, so stellen die Ungleichungen ein „Dreieck" dar mit der Spitze im Nullpunkt. Auch auf dem Rande des Dreiecks treten keine zwei „äquivalente" σ-Punkte auf; der gegebenen Kurve, welche U_τ durchläuft, entspricht demnach eine stetige geschlossene Kurve im σ-Dreieck. Bei der stetigen Deformation muß ein Punkt dieser Kurve, der auf einer Dreiecksseite liegt, auf ihr verbleiben. Man kann ohne Verletzung dieser Forderung wohl jene Kurvenpunkte in den Nullpunkt hineinziehen, die auf den vom Nullpunkt ausgehenden Seiten liegen, aber an der gegenüberliegenden Seite $\sigma_n - \sigma_1 = 1$ bleibt die Kurve „hängen“. Man kann sie verwandeln in ein mehrfaches Durchlaufen derjenigen Kurve, die aus einem Hin- und Hergang auf der Strecke

$$\sigma_2 = \cdots = \sigma_{n-1} = 0, \quad \sigma_1 = -\sigma, \quad \sigma_n = \sigma \quad (0 \leqq \sigma \leqq \tfrac{1}{2})$$

besteht; weiter kommt man auf diesem Wege nicht. Es ist aber dadurch erreicht, daß U_τ sich allein in einer (mit τ stetig variierenden) linearen Mannigfaltigkeit von zwei komplexen Dimensionen abspielt (wobei eine „Achse“ von $n-2$ Dimensionen festbleibt). Indem man nun bedenkt, daß die Gruppe $\mathfrak{G}_u$ in zwei Dimensionen die Zusammenhangsverhältnisse der Kugel im vierdimensionalen Raum besitzt, gelingt die stetige Zusammenziehung auf einen Punkt [1]).

Analog kann man vorgehen, wenn es sich um die Darstellungen der Drehungsgruppe $\mathfrak{D}$ handelt, d. h. derjenigen homogenen linearen Transformationen von der Determinante 1, welche eine gegebene nicht-ausgeartete quadratische Form in sich überführen. Legt man die Form in der Gestalt $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ zugrunde, so besteht der Ausschnitt, über den nach Hurwitz zu integrieren ist, aus den reellen Operationen von $\mathfrak{D}$. Auf diesem Gebilde $\mathfrak{D}_r$ kann man nun freilich nicht jede geschlossene Kurve stetig auf einen Punkt zusammenziehen; doch gilt dies auf einem gewissen geschlossenen Gebilde $\mathfrak{D}_r^*$, das sich ohne Verzweigung und Grenzen zweiblättrig über $\mathfrak{D}_r$ ausbreitet [2]). So kommt man auch hier dazu, daß die inf. Drehungsgruppe $\mathfrak{d}$ nur Darstellungen gestattet, die in irreduzible zerfallen. Die irreduziblen Darstellungen sind von Cartan angegeben worden.

Endlich noch ein paar Worte über die „Komplexgruppe“ $\mathfrak{C}$, welche im $n = 2h$ dimensionalen Raum (mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_h, x_1', \ldots, x_h'$) eine nicht-ausgeartete schiefsymmetrische Bilinearform ungeändert läßt. Legt man die Form in der Gestalt zugrunde

$$\{xy\} = (x_1 y_1' - x_1' y_1) + \cdots + (x_h y_h' - x_h' y_h), \tag{4}$$

so gilt für die Matrizen der zugehörigen inf. Gruppe $\mathfrak{c}$:

---

1) Diesen Beweis habe ich inzwischen noch wesentlich vereinfachen können. (Zusatz b. d. Korrektur.)

2) Der niederste Fall $n = 2$ ist hier natürlich ausgeschlossen. Für $n = 3$, $n = 4$ kann man ja in der Tat sofort Darstellungen angeben, die erst auf einer zweiblättrigen $\mathfrak{D}^*$ über $\mathfrak{D}$ eindeutig sind.

(5) $$\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha_{ik} & \beta_{ik} \\ \hline \gamma_{ik} & \delta_{ik} \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \beta_{ik} \text{ symmetrisch}, \ \gamma_{ik} \text{ symmetrisch}; \\ \alpha_{ki} + \delta_{ik} = 0. \quad [i, k = 1, \ldots, h.] \end{array}$$

Betrachtet man im komplexen Gebiet denjenigen Ausschnitt $\mathfrak{c}_u$, der zugleich die Hermite'sche Einheitsform invariant läßt, so treten die Einschränkungen hinzu:

$$\bar{\alpha}_{ik} + \alpha_{ki} = 0, \quad \bar{\beta}_{ik} = -\gamma_{ik}.$$

Aber eine von der willkürlichen Matrix (5) der Gruppe $\mathfrak{c}$ linear abhängige Größe verschwindet bereits identisch, wenn sie unter diesen Einschränkungen identisch verschwindet. — U gehörte zu $\mathfrak{C}_u$, wenn es sowohl die Form (4) wie die Hermite'sche Einheitsform ungeändert läßt. In einem geeigneten Koordinatensystem, das aus dem gegebenen durch eine unitäre Transformation A von der Determinante 1 hervorgeht, nimmt U die Normalform E an. Zu jeder charakteristischen Wurzel ε von U gehört eine zweite, welche $= \frac{1}{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}$ ist. E läßt diejenige schiefsymmetrische Form

(6) $$S(xy) = \sum_{i,k=1}^{n} s_{ik} x_i y_k$$

invariant, in welche (4) durch A übergeht. Variiert man jetzt in dem Ausdruck $U = A^{-1} E A$ unter Festhaltung von A die Diagonalmatrix E so, daß das Gleich- oder Reziprok-sein zweier charakteristischer Wurzeln aufrecht erhalten bleibt, so läßt E immer dieselbe Form S, also U immer dieselbe Form (4) invariant. Darum kommt man auch hier mit der Analysis-situs-Betrachtung auf gleiche Weise wie oben zum Ziel.

Damit ist die Darstellungstheorie für die vier großen Klassen einfacher Gruppen, welche Cartan unterscheidet, (projektive Gruppe, Drehungsgruppe bei geradem und ungeradem n, Komplexgruppe) vollständig begründet. Ein rein algebraischer Beweis der vollen Reduzibilität in diesen Fällen, welcher innerhalb der infinitesimalen Gruppe operiert, bleibt zu wünschen.