Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik.

Von

Eberhard Hopf in Leipzig.

Im folgenden wird eine zähe inkompressible Flüssigkeit betrachtet. Sie wird, obwohl das nicht wesentlich ist, als homogen vorausgesetzt. Sie erfülle ein beschränktes Gebiet $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(t)$ des Raumes, dessen Rand $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(t)$ aus endlich vielen geschlossenen, in irgendwie vorgeschriebener Weise starr bewegten Flächen $\mathfrak{R}_\iota$ besteht (bewegte starre Körper in einem bewegten, flüssigkeitserfüllten Gefäß). Die verschiedenen $\mathfrak{R}_\nu$ sollen dabei eine positive Mindestdistanz δ voneinander wahren. Die Flächen werden als viermal stetig differenzierbar angenommen. Auf $\mathfrak{R}$ soll die Geschwindigkeit stetig in die des Randes übergehen (die Flüssigkeit haftet an der Wand). Wir setzen zunächst voraus, daß auf die Flüssigkeit keine äußere Massenkraft wirkt.

Hauptvoraussetzung. *Dreh- und Translationsgeschwindigkeit jeder der starr bewegten Randflächen sowie ihre ersten Zeitableitungen (Beschleunigungen) seien stetig und für alle Zeiten absolut unter einer festen Schranke ω gelegen*[1]).

Mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ sind im folgenden die Punkte in $\mathfrak{G}$, mit $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(x, t)$, $\mathfrak{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t)$ die Geschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen bezeichnet. Wir machen von der Vereinbarung, über einen Term zu summieren, Gebrauch, wenn in demselben ein Index doppelt auftritt. Wir setzen

$$K(\mathfrak{u}) = \tfrac{1}{2} \iiint\limits_{\mathfrak{G}(t)} u_i u_i \, dV; \quad dV = dx_1 \, dx_2 \, dx_3,$$

für die kinetische Energie und

$$\tilde{I} = \int\limits_t^{t+1} I \, dt, \qquad I = I(\mathfrak{u}) = \iiint\limits_{\mathfrak{G}(t)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} \, dV.$$

Unter den obigen Voraussetzungen wird in dieser Arbeit ein Endlichkeitssatz für die Flüssigkeitsbewegungen (§ 1) bewiesen. Eine Folgerung aus ihm ist der

Satz. *Es lassen sich zwei Schranken $\varkappa^*$, ϱ^* angeben, welche ausschließlich von der Beschaffenheit der Randflächen, von δ, ω und vom Zähigkeitskoeffizienten*

---

[1]) Wir nehmen außerdem an, daß $\mathfrak{G}(t)$ in einer festen Kugel des Raumes verbleibt.

$\mu > 0$ *abhängen, derart, daß bei einer beliebigen Flüssigkeitsbewegung* $\mathfrak{u}(x, t)$ *in* $\mathfrak{G}(t)$ *von einem passenden Moment ab stets*

$$K < \varkappa^*, \quad \tilde{I} < \varrho^*$$

gilt.

Der Endlichkeitssatz ist ein universelles Theorem der Hydromechanik. Er muß mutatis mutandis auch bei anderen hydrodynamischen Problemanordnungen gelten, wofern eine der obigen Hauptvoraussetzung analoge Voraussetzung erfüllt ist. Im folgenden (§ 4) wird er auch für die Strömung in einem unendlichen Kanal bewiesen, unter der *Voraussetzung, daß der Querschnittsfluß* $Q(t)$ *und* $dQ(t)/dt$ *beschränkt sind.* Der Satz bleibt bestehen, wenn auf die Flüssigkeitsteile eine äußere Massenkraft $X(x,t)$, $X = (X_1, X_2, X_3)$ wirkt, *vorausgesetzt, daß*

$$\iiint\limits_{\mathfrak{G}} X^2 \, dV$$

für alle t beschränkt bleibt.

Die Bedeutung des Endlichkeitssatzes für die Hydrodynamik im Großen, die Lehre vom Strömungsverlauf für $t \to \infty$, liegt auf der Hand. Der Satz leistet hier Ähnliches wie das Energieintegral mit geschlossenen Energieflächen bei einem konservativen System. Im Gebiete $K < \varkappa$, $I < \varrho$ des Phasenraumes muß sich schließlich das hydrodynamische Geschehen abspielen. In diesem Gebiete müssen insbesondere die stabilen Mannigfaltigkeiten von Zentralbewegungen enthalten sein, welche den in der Natur vorwiegend beobachteten Strömungen der Flüssigkeit entsprechen, und deren Bestimmung als wichtigstes Problem der Hydromechanik anzusehen ist.

Die durch den Beweis gelieferten Schranken $\varkappa$, ϱ wachsen, als Funktionen von μ allein betrachtet, für $\mu \to 0$ über alle Grenzen. Dies dürfte im Wesen der Sache liegen. Für die ideale Flüssigkeit ($\mu = 0$) ist auch das Bestehen eines analogen Satzes nicht zu erwarten.

§ 1.

Der Endlichkeitssatz. Erster Teil des Beweises.

Mit $\mathfrak{h}(x, t)$, $\mathfrak{h} = (h_1, h_2, h_3)$, $h_i = h_i(x_1, x_2, x_3, t)$, sei ein Vektorfeld in $\mathfrak{G}(t)$ mit folgenden Eigenschaften bezeichnet. Die t-Ableitungen erster und die x-Ableitungen erster und zweiter Ordnung seien stetige Funktionen von x, t, und zwar in dem von $\mathfrak{G}(t)$ erzeugten Raumzeitgebiete $t \geqq 0$, und auf seinem Rande. $\mathfrak{h}$ soll dieselben linearen Bedingungen wie $\mathfrak{u}$ befriedigen, d. h.

$$\text{(1.1)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{h} \equiv \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = 0$$

in $\mathfrak{G}$ und die Bedingung des Haftens auf $\mathfrak{R}(t)$.

Endlichkeitssatz. *Es lassen sich ein Feld* $\mathfrak{h}(x, t)$ *und zwei Schranken* $\varkappa$, ϱ *mit folgenden Eigenschaften angeben.* $\mathfrak{h}$, $\varkappa$, ϱ *hängen ausschließlich von der Beschaffenheit der Randflächen, von* δ, ω *und* μ *ab.* h_i, $\partial h_i/\partial x_\nu$, $\partial h_i/\partial t$ *sind beschränkte Funktionen von* x, t. *Für eine beliebige Flüssigkeitsströmung in* $\mathfrak{G}(t)$ *gibt es einen Moment, von dem ab stets*

$$K(\mathfrak{u} - \mathfrak{h}) < \varkappa, \quad I(\mathfrak{u} - \mathfrak{h}) < \varrho \tag{1.2}$$

gilt. Gilt die erste dieser Ungleichungen in irgendeinem Zeitpunkt, so gelten sie und die zweite Ungleichung von ihm ab dauernd.

Der in der Einleitung formulierte schwächere Satz folgt hieraus, aus den Dreiecksungleichungen

$$\sqrt{K(\mathfrak{u})} \leqq \sqrt{K(\mathfrak{h})} + \sqrt{K(\mathfrak{u} - \mathfrak{h})}, \quad \sqrt{\tilde{I}(\mathfrak{u})} \leqq \sqrt{\tilde{I}(\mathfrak{h})} + \sqrt{\tilde{I}(\mathfrak{u} - \mathfrak{h})} \tag{1.3}$$

und aus der Beschränktheit der Zeitfunktionen $K(\mathfrak{h})$ und $\tilde{I}(\mathfrak{h})$.

Erster Teil des Beweises[2]. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}(x, t)$ genügt in $\mathfrak{G}$ der Bedingung

$$\operatorname{div} \mathfrak{u} \equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \tag{1.4}$$

und den Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_\nu} = \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \Delta u_i; \qquad i = 1, 2, 3, \tag{1.5}$$

wo $\mu > 0$ den kinematischen Zähigkeitskoeffizienten der Flüssigkeit bedeutet. Wir stellen an die Lösung $\mathfrak{u}(x, t)$, $t \geqq 0$, im folgenden dieselben Anforderungen hinsichtlich Differenzierbarkeit und Stetigkeit wie am Anfang dieses Paragraphen an $\mathfrak{h}(x, t)$[3]. Der Druck $p(x, t)$ sei in $\mathfrak{G}$ eindeutig.

$\mathfrak{v} = \mathfrak{u} - \mathfrak{h}$ erfüllt dann die homogenen linearen Bedingungen, welche zu den für $\mathfrak{u}$ (und $\mathfrak{h}$) vorgeschriebenen linearen Bedingungen gehören,

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0 \quad \text{in } \mathfrak{G} \tag{1.6}$$

und

$$\mathfrak{v} = 0 \quad \text{auf } \mathfrak{R}, \tag{1.7}$$

---

[2]) Die für den Beweis nötigen Überlegungen finden sich im wesentlichen schon in der folgenden Arbeit. J. Leray, *Étude de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'Hydrodynamique.* Journ. de Math. 12 (1933), S. 1—82. Vgl. insbesondere S. 21—47. Der Verf. verfolgt mit ihnen jedoch ein viel engeres Ziel, nämlich die Bestimmung von Schranken von K und I für stationare Strömungen in einem festen Gebiet $\mathfrak{G}$, auf dessen Rand $\mathfrak{u} = \mathfrak{u}(x)$ vorgeschrieben ist.

[3]) Der zweckmäßigste mathematische Begriff der Flüssigkeitsströmung muß, wie die Untersuchungen von Leray zeigen, zweifellos weiter gefaßt werden. Die Durchführung des Beweises auf Grund desselben kann aber erst dann geschehen, wenn diese wichtigen Arbeiten abgeschlossen sind.

und befriedigt in $\mathfrak{G}$ die Gleichungen

$$(1.8)\qquad \frac{d v_i}{d t} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + u_\nu \frac{\partial v_i}{\partial x_\nu}$$
$$= \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_\nu \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} + \mu \Delta v_i - \frac{\partial h_i}{\partial t} - h_\nu \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} + \mu \Delta h_i.$$

Die Zeitableitung von

$$K(\mathfrak{v}) = K(\mathfrak{u} - \mathfrak{h}) = \tfrac{1}{2} \iiint\limits_{\mathfrak{G}(t)} v_i v_i \, dV$$

kann mit Rücksicht auf die Strömungsinvarianz von dV durch substantielles Differenzieren hinter dem Integralzeichen gebildet werden. Setzt man dann (1. 8) ein und integriert man unter Beachtung von (1. 7) und (1. 6) in zwei Termen partiell, so ergibt sich die „Energiegleichung"

$$(1.9)\qquad \frac{d K(\mathfrak{v})}{d t} = Q(\mathfrak{v}) - \mu I(\mathfrak{v}) + L(\mathfrak{v}),$$

wo Q und I quadratische Formen in $\mathfrak{v}$ sind,

$$(1.10)\qquad Q(\mathfrak{v}) = -\iiint\limits_{\mathfrak{G}} v_i v_\nu \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} \, dV$$

(I siehe Einleitung), und

$$(1.11)\qquad L(\mathfrak{v}) = -\iiint\limits_{\mathfrak{G}} v_i \left(\frac{\partial h_i}{\partial t} + h_\nu \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} - \mu \Delta h_i \right) dV$$

eine Linearform in $\mathfrak{v}$ darstellt. K und I sind positiv definit.

In dem Spezialfalle eines festen Gebietes $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{u} = 0$ auf $\mathfrak{G}$, ist alles trivial. Die kinetische Energie wird allmählich durch die Reibung aufgezehrt. Man kann $\mathfrak{h} = 0$, also $Q = L = 0$ wählen und man entnimmt dem Beweise am Schluß von § 2, daß $\varkappa$ und ϱ beliebig klein angesetzt werden können. Es ist aber ganz allgemein richtig, daß soviel von K durch Reibung aufgezehrt wird, daß nur ein a priori angebbarer Höchstteil übrigbleiben kann. In § 2 wird gezeigt, daß das Hilfsfeld $\mathfrak{h}(x, t)$ so gewählt werden kann, daß h_i, $\partial h_i/\partial t$, $\partial h_i/\partial x_\nu$, Δh_i beschränkte Funktionen von x, t sind, und daß die quadratische Form $Q - \mu I$ negativ definit wird. Die Behauptung betreffs K wird sich dann aus (1. 9) ergeben, und daraus, daß für großes K die Linearform L unwesentlich wird.

§ 2.

Die Leraysche Ungleichung. Das Hilfsfeld.

Für eine beliebige, in $\mathfrak{G}$ einmal stetig derivierbare, in $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ stetige und auf $\mathfrak{R}$ verschwindende Funktion $v(x)$ gilt die Leraysche Ungleichung[4])

$$\iiint\limits_{\mathfrak{G}} \left(\frac{v}{s}\right)^2 dV \leqq C \iiint\limits_{\mathfrak{G}} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} dV, \tag{2. 1}$$

wo mit $s = s(x)$ die Entfernung des Punktes x vom Rande $\mathfrak{R}$ bezeichnet ist, und wo die Konstante C nur von der Beschaffenheit der Randflächen und von δ abhängt (also nicht von t).

Beweis. Für jede in $0 \leqq s \leqq a$ stückweise stetig differenzierbare Funktion $f(s)$ mit $f(0) = 0$ gilt

$$\int_0^a \left(\frac{f(s)}{s}\right)^2 ds \leqq 4 \int_0^a (f'(s))^2 ds. \tag{2. 2}$$

Dies folgt durch partielle Integration links

$$-\frac{f^2(a)}{a} + 2 \int_0^a \frac{f(s)}{s} f'(s)\, ds$$

und durch Anwendung der Schwarzschen Ungleichung auf das neue Integral. An der Stelle $s = 0$ ist die Existenz von $f'(s)$ entbehrlich, und es genügt die Stetigkeit von $f(s)$. Man erkennt dies, wenn man links in (2. 2) im Nenner $s + \varepsilon$ statt s schreibt und nach Durchführung $\varepsilon \to 0$ gehen läßt.

Hier und im folgenden sei mit $\mathfrak{G}_a = \mathfrak{G}_a(t)$ die Menge derjenigen Punkte von $\mathfrak{G}(t)$ bezeichnet, deren Entfernung s vom Rande $\leqq a$ ist. Wir rechnen alle Randpunkte zu $\mathfrak{G}_a$ hinzu. Wegen der über den Rand gemachten Voraussetzungen kann $a > 0$ für alle t so gewählt werden, daß jeder Punkt von $\mathfrak{G}_a$ ein und nur ein Lot der Länge $s \leqq a$ auf $\mathfrak{R}$ besitzt. Das Volumenelement in $\mathfrak{G}_a$ kann in der Form

$$dV = k\, do\, ds \tag{2. 3}$$

geschrieben werden, wo do das Flächenelement der Fußpunkte auf $\mathfrak{R}$ bedeutet, und wo k zwischen positiven Grenzen γ, Γ variiert. Die Ungleichung (2. 1) ergibt sich nun für das Gebiet $\mathfrak{G}_a$ leicht aus (2. 2) mit Hilfe von (2. 3), $C = 4\Gamma/\gamma$.

$\mathfrak{K}$ sei nun ein Kugelschalengebiet mit festen (von t unabhängigen) Abmessungen, welches $\mathfrak{G}$ im Innern enthält und mit der äußeren Randfläche

---

[4]) Vgl. Leray, l. c. [2]), S. 38.

von $\mathfrak{G}$ starr verbunden ist. Man setze v durch $v = 0$ in $\mathfrak{K} - \mathfrak{G}$ hinein fort. Durch Anwendung von (2. 1) auf das Gebiet $\mathfrak{K}$ ergibt sich leicht

$$\iiint\limits_{\mathfrak{G}} v^2 \, dV \leqq C_1 \iiint\limits_{\mathfrak{G}} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \frac{\partial v}{\partial x_\nu} \, dV, \tag{2.4}$$

wo die Konstante C_1 nur vom Durchmesser der äußeren Randfläche, also des Gebietes $\mathfrak{G}$, abhängt. Aus (2. 4) folgt, was später von Nutzen ist,

$$K(\mathfrak{v}) \leqq C_1 \, I(\mathfrak{v}). \tag{2.5}$$

Durch Kombination von (2. 1), mit $\mathfrak{G}_a$ statt $\mathfrak{G}$, und (2. 4) ergibt sich (2. 1) leicht für ganz $\mathfrak{G}$.

Konstruktion des Feldes $\mathfrak{h}$[5]. Für den Beweis des Endlichkeitssatzes ist es entscheidend, daß für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$ $\mathfrak{h}(x, t)$ so gebildet werden kann, daß für alle x und t

$$\left| \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} \right| < \varepsilon s^{-2} \tag{2.6}$$

ausfällt; s ist wie oben der Abstand von x von $\mathfrak{R}$. Gleichzeitig bleiben

$$|h_i|, \quad \left| \frac{\partial h_i}{\partial x_\nu} \right|, \quad |\Delta h_i|, \quad \frac{\partial h_i}{\partial t} \tag{2.7}$$

unter festen, von x, t unabhängigen Schranken. Wir werden für diese Größen Schranken der Form

$$(C_2 + \varepsilon C_3) \exp \frac{C_4}{\varepsilon} \tag{2.7'}$$

erhalten, wo die C_ν ausschließlich von der Beschaffenheit der Randflächen und von δ, ω abhängen (also nicht von ε).

Beweis. Die auf $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}(t)$ vorgeschriebene Geschwindigkeit der Wand läßt sich in der Form

$$\mathfrak{u} = \operatorname{rot} \mathfrak{q} \text{ auf } \mathfrak{R} \tag{2.8}$$

schreiben, wo $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(x, t)$ ein in $\mathfrak{G}_a(t)$ folgendermaßen definiertes Vektorfeld ist. Die Geschwindigkeit der starr bewegten Randfläche $\mathfrak{R}_i$ ist

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{x} \times \mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i, \tag{2.9}$$

($\mathfrak{x}$ = Ortsvektor x), wo $\mathfrak{a}_i(t)$ die Dreh- und $\mathfrak{b}_i(t)$ die Translationsgeschwindigkeit bedeuten. Man rechnet leicht aus, daß (2. 9) gleich rot von

$$\tfrac{1}{2}(-\mathfrak{x}^2 \mathfrak{a}_i + \mathfrak{x} \times \mathfrak{b}_i) \tag{2.10}$$

ist. Definiert man $\mathfrak{q}$ durch (2. 10) in dem an $\mathfrak{R}_i$ angrenzenden Teile von $\mathfrak{G}_a$, so gilt (2. 8). Nach der Hauptvoraussetzung sind die Ableitungen der Kom-

[5]) In dem von Leray, l. c. [2]), S. 40, 43, 44 angestellten Betrachtungen ist der Grundgedanke bereits implizit enthalten.

ponenten q_i nach x und t, nach t höchstens einmal genommen, absolut unter festen Schranken const $\cdot\,\omega$ gelegen.

$\varphi(x, t)$ sei nun eine skalare Funktion in $\mathfrak{G} + \mathfrak{R}$ derart, daß φ, φ'_x, φ''_{xx}, φ'''_{xxx}, φ'_t, φ''_{xt} in dem von $\mathfrak{G}(t)$ erzeugten Raumzeitgebiete und auf seinem Rande stetig sind. Sie genüge den Bedingungen

$$\text{A)}\quad \varphi = 1,\ \varphi'_x = 0 \text{ auf } \mathfrak{R},$$
$$\text{B)}\quad \varphi = 0 \text{ in } \mathfrak{G} - \mathfrak{G}_a.$$

Das Feld

$$\mathfrak{h} = \operatorname{rot} \varphi \mathfrak{q} \tag{2.11}$$

erfüllt dann sämtliche, im ersten Absatz von § 1 an $\mathfrak{h}$ gestellten Forderungen. Wegen div rot $\equiv 0$ gilt (1. 1), und wegen A) genügt $\mathfrak{h}$ auf $\mathfrak{R}$ der Haftbedingung. Außerdem gilt $\mathfrak{h} = 0$ in $\mathfrak{G} - \mathfrak{G}_a$. Wir wählen φ in der Form $\varphi(s)$, wo s wie oben den Abstand des Punktes x von $\mathfrak{R}$ bedeutet. $\varphi(s)$ sei für alle $s \geqq 0$ mit stetigem φ''' versehen und erfülle die Bedingungen

$$\text{A}')\quad \varphi(0) = 1,\ \varphi'(0) = 0,$$
$$\text{B}')\quad \varphi(s) = 0,\ s \geqq a.$$

Um zu zeigen, daß $\varphi(x, t) = \varphi(s(x, t))$ allen obigen Forderungen genügt, braucht man nur zu zeigen, daß $s(x, t)$ die von φ verlangten Eigenschaften der stetigen Derivierbarkeit in dem von $\mathfrak{G}_a(t)$ erzeugten Raumzeitgebiet und auf seinem Rand besitzt.

Nach Voraussetzung hängen auf $\mathfrak{R}$ die $x_i(\alpha, \beta)$ viermal stetig derivierbar von gewissen Parametern α, β ab. Die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes in $\mathfrak{G}_a$ sind also dreimal stetig nach α, β, s derivierbar. Da nach (2) die Funktionaldeterminante $k\sqrt{EG - F^2} \neq 0$ ist, gilt Analoges von den Umkehrfunktionen, also von $s(x, t)$ bei festem t. In einem mit der betrachteten Randfläche $\mathfrak{R}_j$ starr verbundenen y-Bezugssystem ist nun $s = s(y)$, wobei die x_i inhomogene lineare Funktionen der y_ν sind, deren Koeffizienten, nach t differenziert, Komponenten von $\mathfrak{a}_j(t)$ und $\mathfrak{b}_j(t)$ sind. Daraus folgt die Behauptung bezüglich $s(x, t)$. Gleichzeitig erkennt man mit Rücksicht auf die Hauptvoraussetzung, daß die Größen (2. 7) für alle x, t beschränkt sind.

Wir setzen nun

$$\varphi(s) = \frac{\int_{\vartheta}^{1} \frac{1}{p}\,\psi\!\left(\frac{s}{p}\right) dp}{\int_{\vartheta}^{1} \frac{1}{p}\, dp}, \tag{2.12}$$

$0 < \vartheta < 1$. Dabei sei $\psi(s)$, $s \geqq 0$, eine feste Funktion mit stetigem ψ''' und mit den Eigenschaften A′) und B′), z. B.

$$\psi(s) = \begin{cases} \left(1 - \frac{s^2}{a^2}\right)^4, & s \leqq a, \\ 0 & , \ s \geqq a. \end{cases} \tag{2.13}$$

$\varphi(s)$ besitzt dann offenbar dieselben Eigenschaften. Man findet ferner

$$\varphi''(s) = \frac{1}{\log \frac{1}{\vartheta}} \int\limits_{\vartheta}^{1} \frac{1}{p^3} \psi''\left(\frac{s}{p}\right) d\,p = \frac{s^{-2}}{\log \frac{1}{\vartheta}} \int\limits_{s}^{s/\vartheta} \sigma\, \psi''(\sigma)\, d\sigma,$$

also

$$|\varphi''(s)| < \varepsilon s^{-2}, \tag{2.14}$$

wenn

$$\varepsilon = \frac{1}{\log \frac{1}{\vartheta}} \int\limits_{0}^{a} \sigma\, |\psi''(\sigma)|\, d\sigma \tag{2.15}$$

gesetzt wird. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wird durch (2. 15) ein $\vartheta < 1$ bestimmt. Aus (2. 14) folgt $|\varphi'| < \varepsilon s^{-1}$. Außerdem ist $0 \leqq \varphi \leqq 1$. Wegen (2. 11) ergibt sich hieraus (2. 6) bis auf einen konstanten Faktor $A(\omega, \delta)$, den man beseitigen kann, wenn man ihn schon in (2. 15) berücksichtigt.

Formt man die durch Differenzieren von (2. 12) erhaltenen Integrale nicht um, so erhält man direkt die Abschätzungen

$$|\varphi'| < \frac{A_1}{\vartheta \log \frac{1}{\vartheta}}, \quad |\varphi''| < \frac{A_2}{\vartheta^2 \log \frac{1}{\vartheta}}, \quad |\varphi'''| < \frac{A_3}{\vartheta^3 \log \frac{1}{\vartheta}},$$

$s \geqq 0$, wo die A_i nur von a, d. h. nur von δ abhängen können. Drückt man ϑ vermöge (2. 15) durch ε aus, so ergeben sich wegen (2. 11) leicht Schranken der Form (2. 7′) für (2. 7).

A n m e r k u n g. Im Sonderfalle, wo das Gebiet $\mathfrak{G}(t)$ dauernd sich selbst kongruent bleibt, kommt man viel leichter zu einem brauchbaren Felde $\mathfrak{h}$. Man betrachte etwa den Fall, wo ein Rotationskörper in einem festen Gefäß um eine feste Achse rotiert; $\mathfrak{R}_i$ sei die Oberfläche des Körpers. Legt man den Nullpunkt auf die Achse, so ist die Geschwindigkeit auf $\mathfrak{R}_i$ gleich $\mathfrak{x} \times \mathfrak{a}$, wo $\mathfrak{a}(t)$ sich selbst parallel bleibt. Mit Hilfe einer mit stetigem ψ'' versehenen festen Funktion $\psi(s)$, $s \geqq 0$, mit den Eigenschaften $\psi(0) = 1$; $\psi = 0$, $s \geqq 1$, setze man

$$\mathfrak{h} = \psi(s/\varepsilon)\, \mathfrak{x} \times \mathfrak{a},$$

$s =$ Abstand von $\mathfrak{R}_i$. Da für $s < \varepsilon$ die Stromlinien des momentanen Feldes Rotationskreise sind und die Geschwindigkeit auf ihnen tangential und konstant ist, gilt $\operatorname{div} \mathfrak{h} = 0$. Man findet

$$(2.16) \qquad \left|\frac{\partial h_i}{\partial x_\nu}\right| < C' \varepsilon^{-1}, \quad s < \varepsilon; \quad \mathfrak{h} = 0, \quad s \geqq \varepsilon.$$

Außerdem ergibt sich für $\varepsilon < 1$

$$(2.17) \qquad |h_i| < C_1', \quad \left|\frac{\partial h_i}{\partial t}\right| < C_2', \quad |\Delta h_i| < C_3' \varepsilon^{-2}.$$

§ 3.

Schluß des Beweises.

Wegen $\Sigma |v_i v_\nu| \leqq 3\, v_j v_j$ folgt aus der Lerayschen Ungleichung (2. 1) aus (1. 10) und (2. 6)

$$(3.1) \qquad |Q(\mathfrak{v})| \leqq 3\, C \varepsilon \cdot I(\mathfrak{v}).$$

Aus (1. 11) und (2. 7) in Verbindung mit den Schranken (2. 7') folgt wegen der Schwarzschen Ungleichung

$$(3.2) \qquad |L(\mathfrak{v})| \leqq B \cdot \sqrt{K(\mathfrak{v})}$$

mit

$$(3.3) \qquad B = (C_5 + C_6 \varepsilon) \exp \frac{C_7}{\varepsilon},$$

wo von den Konstanten C_i gleiches gilt wie früher ($i \leqq 4$). Setzt man $\varepsilon = \mu/6C$, so ergibt sich aus (1. 9) die *fundamentale Differentialungleichung*

$$(3.4) \qquad \frac{dK(\mathfrak{v})}{dt} < -\frac{\mu}{2} I(\mathfrak{v}) + B\sqrt{K(\mathfrak{v})},$$

welcher jede mögliche Strömung der Flüssigkeit in $\mathfrak{G}(t)$ genügen muß.

Aus (2. 5) folgt

$$\frac{dK}{dt} < -\frac{\mu}{2C_1} K + B\sqrt{K}.$$

Bezeichnet man mit $\varkappa$ denjenigen Wert von K, für welchen der zweite Term gleich der Hälfte des ersten wird,

$$(3.5) \qquad \varkappa = \sqrt{\frac{4BC_1}{\mu}} = \sqrt{C_8 + C_9 \mu^{-1}} \exp \frac{C_{10}}{\mu},$$

so folgt, daß für $K \geqq \varkappa$ stets

$$\frac{dK}{dt} < -\frac{\mu}{4C_1} K$$

gilt, K also exponentiell abnimmt. Damit ist der auf K bezügliche Teil des Endlichkeitssatzes bewiesen. Die Behauptung betreffs $\tilde{I} = \int_t^{t+1} I\,dt$ folgt dann sofort aus (3. 4) durch Integration. Es ergibt sich

$$\varrho = \frac{4\varkappa + 2B\cdot\sqrt{\varkappa}}{\mu}.$$

Für kleine μ sind $\log \varkappa$, $\log \varrho$ von der Größenordnung μ^{-1}. Für große μ bleiben $\varkappa$, ϱ beschränkt[6]).

Anmerkung. Für den in der Anmerkung von § 2 erwähnten Sonderfall findet man ein $\varkappa$, das für $\mu \to 0$ nur algebraisch unendlich wird. Man wende (2. 1) auf das Gebiet $s \leqq \varepsilon$ an und ersetze s durch ε links im Nenner. Dann ergibt sich aus (2. 16) und (2. 17) für $\varepsilon = \mu/6\,CC'$ ein $\varkappa \sim \mu^{-6}$. Schafft man in (1. 11) durch partielle Integration die zweiten Ableitungen von h_i heraus, so erhält man sogar $\varkappa \sim \mu^{-4}$.

Genau dasselbe gilt von der in § 4 betrachteten Kanalströmung, wenn der Kanal durch eine kontinuierliche Gruppe von Bewegungen in sich übergeht (zylindrischer oder schraubenförmiger Kanal).

§ 4.

Erweiterungen. Andere Probleme.

Äußere Kraft. Das Auftreten einer äußeren Massenkraft $X(x, t)$: $X_i(x_1, x_2, x_3, t)$, $i = 1, 2, 3$, ändert nichts am Schluß, wofern

$$\iiint_{\mathfrak{G}} X^2\,dV$$

für alle t unter einer festen Schranke bleibt. Sie liefert nur einen Beitrag zur Linearform $L(\mathfrak{v})$ in (1. 9).

Kanalströmung. Die Flüssigkeit ströme durch einen unendlich langen ruhenden Kanal und hafte an der Wand ($\mathfrak{u} = 0$ auf $\mathfrak{R}$). Wir nehmen an, daß die Randfläche in der Form $r = r(\alpha, z)$ darstellbar ist, wo $r > 0$, α, z Zylinderkoordinaten bedeuten (r hat die Periode 2π in α). Um ein Problem mit

6) Für hinreichend große μ gibt es vermutlich nur eine Stromung in dem Sinne, daß für irgend zwei Strömungen $\mathfrak{u}_1(x, t)$ und $\mathfrak{u}_2(x, t)$ stets $K(\mathfrak{u}_1 - \mathfrak{u}_2) \to 0$ für $t \to \infty$ gilt. Im Falle der in § 4 betrachteten Kanalströmung, insbesondere im zylindrischen Kanal, ist das wohlbekannt und leicht aus der Energiegleichung herzuleiten, indem man für $\mathfrak{h}$ die stationäre Lösung einsetzt.

Bei abnehmendem μ treten kompliziertere mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten im Phasenraum auf, auf welche sich die Bewegungen für $t \to \infty$ konzentrieren. Sie entsprechen den turbulenten Strömungen der Flüssigkeit.

endlichem Grundgebiet zu erhalten, setzen wir Kanal und Strömung als periodisch in der z-Richtung voraus,

$$r(\alpha, z + P) \equiv r(\alpha, z)$$

und

$$\mathfrak{u}(r, \alpha, z + P, t) \equiv \mathfrak{u}(r, \alpha, z, t).$$

Das Problem der Strömung bei vorgegebener Anfangs-Geschwindigkeitsverteilung wird erst dann ein bestimmtes, wenn auch der Querschnittsfluß

$$Q = Q(t) = \iint\limits_{z = \text{const}} \mathfrak{u}_z \, do \tag{4.1}$$

als Funktion von t vorgeschrieben ist; denn der Periodizitätsmodul des Druckes (mittleres Druckgefälle in der z-Richtung) geht als Unbekannte ein.

Voraussetzung. Q, dQ/dt sind beschränkte Funktionen von t.

Zur Übertragung des Beweises muß man vom Hilfsfelde $\mathfrak{h}$ außer der Erfüllung der Rand-, Periodizitäts- und Divergenzbedingung auch

$$Q(t) = \iint\limits_{z = \text{const}} \mathfrak{h}_z \, do \tag{4.2}$$

verlangen. Bei der Herleitung von (1.9) verschwindet dann wegen

$$\iint\limits_{z = \text{const}} \mathfrak{v}_z \, do = 0$$

wie vorher der Term

$$\iiint\limits_{\mathfrak{G}} v_i \frac{\partial p}{\partial x_i} \, dV,$$

wo $\mathfrak{G}$ ein festes Periodenstück $0 \leqq z < P$ des Kanals bedeutet. (1.9) gilt also mit dieser Maßgabe unverändert.

Die Konstruktion von $\mathfrak{h}(x, t)$ geht nun genau so von statten wie oben, nur daß diesmal

$$\mathfrak{q} = \frac{Q(t)}{2\pi} \operatorname{grad} \alpha$$

mit der Zylinderkoordinate $\alpha = \alpha(x_1, x_2, x_3)$ gewählt wird. Wieder wird

$$\mathfrak{h}(x, t) = \operatorname{rot} \varphi \mathfrak{q}$$

mit genau so gebildetem $\varphi = \varphi(s)$ gesetzt. Wegen rot grad $\equiv 0$ und $\varphi'(0) = 0$ ist $\mathfrak{h} = 0$ auf $\mathfrak{R}$. Es gilt aber auch (4.2). Nach dem Stokesschen Integralsatz ist nämlich das Integral gleich der Zirkulation des Vektors $\varphi \mathfrak{q} = \mathfrak{q}$ ($\varphi = 1$ auf $\mathfrak{R}$) längs der Randlinie des Querschnitts, also gleich $Q(t)/2\pi$ mal $\oint d\alpha$, w. z. b. w.

Die Zeit t kommt hier in $\mathfrak{h}$ nur im Faktor $Q(t)$ vor. Unter Berücksichtigung der obigen Voraussetzung kann nunmehr der Beweis des Schrankensatzes genau so wie vorher zu Ende geführt werden. Die Schranken $\varkappa$, ϱ hängen hier ebenso von μ ab wie oben.

Andere Varianten. Unter Verzicht auf genauere Ausführung der Einzelheiten sei schließlich auf die Möglichkeit hingewiesen, den Schrankensatz für die folgenden Problemvarianten zu beweisen.

Es dürfen die Randflächen Kanten oder Ecken besitzen. Auch ist die Voraussetzung eines positiven Minimalabstandes der Randflächen voneinander im ersten oben betrachteten Modell unwesentlich. Sie ist bei den bekannten Versuchsanordnungen auch nicht erfüllt. Man halte sich vor Augen, in welcher Weise die vorgeschriebene Bewegung der inneren Randflächen relativ zur äußeren praktisch verwirklicht wird. Es treten dann auf dem Rande $\mathfrak{R}$ Kanten auf, bei deren Überschreitung die Randwerte von $\mathfrak{u}$ einen Sprung machen. Ein Modell dieser Art wird auch durch ein in zylindrische Schäfte ausmündendes, flüssigkeitserfülltes Gefäß mit Kolben in denselben, welche vorgeschriebene Bewegungen ausführen, dargestellt. Der Endlichkeitssatz bleibt bestehen, wenn die Behauptung der Beschränktheit von $\partial h_i / \partial x_\nu$ als Funktion von x, t durch eine weitere ersetzt wird. Infolge jenes Sprunges ist hier immer $I(\mathfrak{u}) = I(\mathfrak{h}) = \infty$. Die in der Einleitung erwähnte Folgerung gilt also nur bezüglich K.

Das Gebiet $\mathfrak{G}$ darf ferner den unendlich fernen Punkt enthalten; die Flüssigkeit möge dort ruhen. Auch dürfen punkt- und linienhafte Quellen auftreten. Auch hier gilt mutatis mutandis der Endlichkeitssatz. Da im letzteren Falle stets $K(\mathfrak{u}) = K(\mathfrak{h}) = \infty$ ist, gilt der Satz der Einleitung nicht.

(Eingegangen am 21. 9. 1940.)