Über eine Analogie der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen in drei Dimensionen.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 27. Oktober 1922.

§ 1. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

durch die man den Begriff der Funktion einer komplexen Veränderlichen definiert, lassen sich bekanntlich durch die Strömung einer inkompressibeln wirbelfreien Flüssigkeit veranschaulichen, deren Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ [1]) die Komponenten $u, -v$, 0 hat und nur von x und y abhängt. Die beiden Gleichungen lauten dann in Vektorsprache

$$\nabla . \mathfrak{v} = 0 \qquad \nabla \times \mathfrak{v} = 0$$

in Worten: Nabla mit $\mathfrak{v}$ gleich 0 und Nabla an $\mathfrak{v}$ gleich Null. Das erste drückt die Inkompressibilität, das zweite die Wirbelfreiheit aus. Das erste ist eine skalare, das zweite eine Vektor-Gleichung. Aber da hier die dritte Komponente von $\mathfrak{v}$ Null ist und $\mathfrak{v}$ von der dritten Koordinate unabhängig ist, so steht der Vektor $\nabla \times \mathfrak{v}$ überall auf der Ebene der Strömung senkrecht und sein Verschwinden liefert daher nur eine skalare Gleichung.

Will man die Cauchy-Riemannschen Differential-Gleichungen auf drei Dimensionen sinngemäß verallgemeinern, so sieht es zunächst so aus, als ob man gezwungen wäre, das Geschwindigkeitsfeld der

---

1) Vektoren sind im Folgenden mit kleinen deutschen Buchstaben bezeichnet.

2) ∇ bedeutet den Operator „Nabla“ $\frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}$. Der Punkt „.“ bedeutet das skalare, das Kreuz „$\times$“ das vektorielle Produkt.

dreidimensionalen Strömung den Bedingungen

$$\nabla . \mathfrak{v} = 0 \qquad \nabla \times \mathfrak{v} = 0$$

zu unterwerfen, d. h. auch hier eine inkompressible, wirbelfreie Strömung zu betrachten. Nach dem Stokesschen Satz

$$\int \mathfrak{v} . d\mathfrak{r} = \int \mathfrak{w}\, d\mathfrak{S}$$ [1]

ist dann die „Zirkulation"

$$\int \mathfrak{v} . d\mathfrak{r}$$

um den Rand jedes beliebigen Flächenstücks Null oder, was auf dasselbe hinauskommt,

$$\int \mathfrak{v} . d\mathfrak{r}$$

von einem festen Anfangspunkt aus auf irgend einem Wege bis zu einem veränderlichen Punkt integriert liefert uns eine skalare Funktion φ, für die

$$d\varphi = \mathfrak{v} . d\mathfrak{r}$$

ist. Das heißt $\mathfrak{v}$ ist der Gradient von φ

$$\mathfrak{v} = \nabla\varphi$$

und φ genügt wegen der Inkompressibilitätsbedingung der Gleichung

$$\Delta\varphi = 0,$$

und damit laufen die Betrachtungen des Geschwindigkeitsfeldes auf die gewöhnliche Potentialtheorie hinaus.

Es gibt aber noch eine andere ebenso natürliche und viel interessantere Verallgemeinerung, wenn wir dem Geschwindigkeitsfeld die beiden Bedingungen

$$\nabla . \mathfrak{v} = 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = 0 \qquad (\mathfrak{w} = \nabla \times \mathfrak{v})$$

auferlegen. Diese beiden Bedingungen sind ebensogut eine sinngemäße Verallgemeinerung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, in die sie für die zweidimensionale Strömung übergehn. Denn da hier, wie oben schon bemerkt wurde, $\mathfrak{w} . \mathfrak{v}$ Null sein muß, so ist der absolute Betrag von $\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}$ gleich dem Produkt der absoluten Beträge von $\mathfrak{w}$ und von $\mathfrak{v}$. Überall wo die Geschwindigkeit von Null verschieden ist, muß daher der Wirbel verschwinden,

1) $\mathfrak{w}$ ist fur den Wirbel $\nabla \times \mathfrak{v}$ geschrieben. $d\mathfrak{S}$ ist eine „Plangröße" ein Element des Flachenstücks, uber das integriert wird und besitzt eine positive und eine negative Seite. $\mathfrak{w}\, d\mathfrak{S}$ ist das Volumen, das $d\mathfrak{S}$ beschreibt, wenn es um $\mathfrak{w}$ verschoben wird, positiv oder negativ gerechnet, je nachdem es nach seiner positiven oder negativen Seite verschoben ist.

und wir fallen damit auf die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\nabla . \mathfrak{v} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla \times \mathfrak{v} = 0$$

zurück.

Die neue Verallgemeinerung ist deshalb interessanter, weil sie nicht **nur** Potentialströmung zuläßt, sondern auch Wirbel. Allerdings verlangt sie von den Wirbellinien, daß $\mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = 0$ sei, d. h. daß die Richtung der Wirbellinie der Richtung der Geschwindigkeit gleich oder entgegengesetzt sei. Die Wirbellinien müssen daher mit Stromlinien zusammenfallen und jedes Wirbelelement muß in Richtung seiner eigenen Achse oder der entgegengesetzten Richtung der Stromlinie entlang fließen.

Es fragt sich aber zunächst, ob die Bedingungen mit den Eulerschen Gleichungen einer inkompressibeln stationären Strömung vereinbar sind. Nun ist nach einer bekannten Vektorgleichung

$$(\nabla \times \mathfrak{v}) \times \mathfrak{v} = (\mathfrak{v} . \nabla)\mathfrak{v} - \nabla\left(\frac{\mathfrak{v} . \mathfrak{v}}{2}\right)^{1)}.$$

Unsere beiden Gleichungen lauten daher

$$\nabla . \mathfrak{v} = 0$$
$$(\mathfrak{v} . \nabla)\mathfrak{v} = \tfrac{1}{2}\nabla(\mathfrak{v} . \mathfrak{v}).$$

Das ist nun nichts anderes als die Eulerschen Gleichungen für die stationäre Strömung einer inkompressibeln Flüssigkeit unter der Voraussetzung, daß die äußeren Kräfte, falls sie vorhanden, ein Potential haben und einer zweiten Voraussetzung, die sogleich formuliert werden wird. Denn wenn es eine skalare Funktion Ω gibt, so daß an irgend einer Stelle der Flüssigkeit die auf das Volumteilchen $d\tau$ ausgeübte äußere Kraft gleich

$$-\nabla\Omega\, d\tau$$

ist, so lauten die Eulerschen Gleichungen der stationären inkompressible Strömung bekanntlich:

$$\nabla . \mathfrak{v} = 0 \qquad \varrho(\mathfrak{v} . \nabla)\mathfrak{v} = -\nabla p - \nabla\Omega.$$

Die linke Seite der zweiten Gleichung ist gleich ϱ mal der Beschleunigung der Flüssigkeit an der betrachteten Stelle. Durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{v}$ und Integration nach der Zeit er-

---

1) Unter $\mathfrak{v} . \nabla$ ist der Operator $u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$ verstanden, wenn $\mathfrak{v} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} + w\mathfrak{k}$ ist.

halten wir die bekannte Bernoullische Gleichung

$$\varrho \frac{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}}{2} = -p - \Omega + C,$$

in der C längs einer Stromlinie seinen Wert nicht verändert. Unter der Voraussetzung nun, daß C auch von Stromlinie zu Stromlinie seinen Wert nicht ändert, wird

$$\frac{\varrho}{2} \nabla (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) = -\nabla p - \nabla \Omega$$

womit die Eulersche Gleichung nach Weghebung des Faktors ϱ in die Form

$$(\mathfrak{v} \cdot \nabla) \mathfrak{v} = \tfrac{1}{2} \nabla (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v})$$

übergeht.

Die beiden Voraussetzungen, die wir für die stationäre Strömung der inkompressibeln Flüssigkeit machen, sind also erstens, daß die auf die Flüssigkeitsteilchen wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, zweitens daß in der Bernoullischen Gleichung

$$\varrho \frac{\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}}{2} = -p - \Omega + C$$

die Größe C auch auf den verschiedenen Stromlinien denselben Wert habe. Wenn wir uns z. B. die Atmosphäre über einer unendlichen Ebene in einem konstanten Schwerefelde vorstellen und einen Körper, der in einer gleichmäßigen horizontalen Luftströmung festgehalten wird, so treffen die Voraussetzungen zu. Denn in größerem horizontalem Abstand vom Körper haben sowohl $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}$ wie $p + \Omega$ auf den verschiedenen Stromlinien dieselben Werte, da der Druck auf einem horizontalen Querschnitt von der Erdoberfläche aus sich nach oben um das Gewicht der Luftsäule vermindert, während das Kräftepotential nach oben um dieselbe Größe zunimmt.

§ 2. Aus den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen wird das Cauchysche Integraltheorem abgeleitet, indem man sie über ein Gebiet der komplexen Zahlenebene integriert und die Integrale in Randintegrale verwandelt. Wir wollen hier analog verfahren und unsere Differentialgleichungen über einen Raumteil integrieren, durch den die Flüssigkeit strömt, und wollen die Raumintegrale in Integrale über die Begrenzung des Raumteils verwandeln.

Die erste Gleichung liefert dann das bekannte Gaußsche Integral $\int \nabla \cdot \mathfrak{v}\, d\tau = -\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{S} = 0.$ $\mathfrak{v}\, d\mathfrak{S}$ [1]) oder wenn man den Be-

1) Die positive Seite von $d\mathfrak{S}$ nach innen genommen.

griff der „Plangröße“ vermeiden will $(\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{n})\,d\omega$, wo unter $\mathfrak{n}$ die nach innen gerichtete Normale, unter $d\omega$ der positive Flächeninhalt eines Begrenzungselements verstanden ist, bedeutet mit ϱ multipliziert die in der Zeiteinheit durch das Begrenzungselement tretende Flüssigkeitsmenge positiv, wenn sie in den Raum hinein, negativ wenn sie heraustritt. Das Integral formuliert also die Selbstverständlichkeit, daß bei der stationären Strömung einer inkompressibeln Flüssigkeitsmenge die einströmende Menge gleich der ausströmenden ist. Das Integral über die zweite Gleichung $\mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = 0$ zerlegen wir in zwei Teile entsprechend der Zerlegung

$$(\nabla \times \mathfrak{v}) \times \mathfrak{v} = (\mathfrak{v}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v} - \tfrac{1}{2}\,\nabla(\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})$$

und erhalten

$$\int (\mathfrak{v}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v}\,d\tau = -\int \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S})$$

$$\tfrac{1}{2}\int \nabla(\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\,d\tau = -\tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{n}\,d\omega.$$

Im Ganzen ergibt das also analog dem Cauchyschen Integral die beiden Begrenzungsintegrale

$$\int \mathfrak{v}\,d\mathfrak{S} = 0 \qquad \text{und} \qquad \int \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}) - \tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{n}\,d\omega = 0.$$

Umschließt eine Fläche ein Gebiet, durch das keine Strömung fließt oder in dem die Differentialgleichungen nicht erfüllt sind, so wollen wir sie um dieses Gebiet zusammenziehen, so daß sie näher an das Gebiet herantritt. Dann kann man die erste Fläche mit der zweiten zusammen als die vollständige Begrenzung des dazwischenliegenden Raumes betrachten, in dem wir unsere Differentialgleichung erfüllt ansehn. Bei der Integration über die ganze Begrenzung sind aber für die zweite Fläche die positive Seite von $d\mathfrak{S}$ und die Richtung von $\mathfrak{n}$ entgegengesetzt zu nehmen, als wie sie bei der Zusammenziehung der ersten Fläche aus den entsprechenden Gebilden hervorgehn. Nimmt man sie dagegen ebenso gerichtet wie sie hervorgehn, so nimmt das Verschwinden der Begrenzungsintegrale die Form an, daß jeder der beiden Integralausdrücke

$$\int \mathfrak{v}\,d\mathfrak{S} \qquad \text{und} \qquad \int \mathfrak{v}\,(\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}) - \tfrac{1}{2}\int (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{n}\,d\omega$$

sich nicht ändert, wenn man die Fläche über die es erstreckt ist, um das betrachtete Gebiet zusammenzieht. Diese Werte, von denen der erste eine skalare Größe der zweite ein Vektor ist, sind das Analogon des Cauchyschen Residuums und haben eine einfache mechanische Bedeutung.

$$\varrho \int \mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}$$

bedeutet, wenn positiv, die Flüssigkeitsmenge, die in der Zeiteinheit in das betrachtete Gebiet mehr ein als austritt, wenn negativ, die Menge die mehr aus als eintritt. Denn dieses Gebiet brauchen wir nicht voll Flüssigkeit anzunehmen und haben daher zuzulassen, daß Flüssigkeit mehr hinein oder mehr herausströmt. Der Vektor

$$\varrho \int \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\, d\mathfrak{S})$$

bedeutet die Differenz zwischen dem in der Zeiteinheit in das Innere der Fläche tretenden Impulse vermindert um den austretenden Impuls und $-\frac{\varrho}{2}\int(\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{n}\,d\omega$ ist, wenn keine äußeren Kräfte vorhanden sind, die Druckresultante, mit der die außerhalb der Fläche gelegene Flüssigkeit auf die Fläche drückt. Wenn äußere Kräfte vorhanden sind, so tritt $p + \Omega$ an die Stelle von p. Außer der Druckresultante $\int p\,\mathfrak{n}\,d\omega$ haben wir dann noch $\int \Omega\,\mathfrak{n}\,d\omega = -\int \nabla\Omega\,\mathfrak{n}\,d\tau$ d. i. die Resultante der äußeren Kräfte, wenn wir uns das ganze Innere der Fläche mit Flüssigkeit erfüllt denken. Bei ruhender Flüssigkeit würden diese beiden Kräfte sich das Gleichgewicht halten.

Betrachten wir z. B. den Fall eines festen Körpers, der in einer Strömung festgehalten wird, die in hinreichender Entfernung von ihm gleichmäßig wird. Wir ziehen nun die Fläche so dicht um den Körper herum, daß die an ihm entlang laufenden Stromlinien in der Fläche liegen. Für diese Fläche ist dann $\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}$ überall Null, weil $\mathfrak{v}$ dem $d\mathfrak{S}$ parallel ist. Das Residuum wird also gleich der Druckresultante vermehrt um die Resultante der äußeren Kräfte, die nach dem Kräftepotential auf den von dem Körper eingenommenen Raum wirken würden, wenn er mit Flüssigkeit erfüllt wäre. Diesen beiden Kräften muß diejenige Kraft das Gleichgewicht halten, die den Körper zwingt gegen die Strömung an seiner Stelle zu bleiben.

Wir haben also das nachfolgende Theorem: *Das Integral*

$$\int \mathfrak{v}(\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S}) - \tfrac{1}{2}\int(\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{v})\,\mathfrak{n}\,d\omega$$

erstreckt über eine den Körper einschließende Fläche (wo $\mathfrak{n}$ die innere Normale ist und $\mathfrak{v}\,d\mathfrak{S} = (\mathfrak{v}\,.\,\mathfrak{n})\,d\omega$ positiv oder negativ ist, je nachdem $\mathfrak{v}$ hinein oder hinausführt) stellt die Kraft dar, mit der die Flüssigkeit auf den Körper wirkt.

§ 3. Wenn außer den äußeren Kräften, die das Potential Ω besitzen, noch eine Kraft $\mathfrak{k}\,d\tau$ auf das Volumteilchen $d\tau$ wirkt, von der wir annehmen wollen, daß sie auf $\mathfrak{v}$ senkrecht steht, so lauten die Eulerschen Gleichungen der stationären inkompressibeln Strömung:

$$\nabla\,.\,\mathfrak{v} = 0 \qquad \text{und} \qquad \varrho(\mathfrak{v}\,.\,\nabla)\,\mathfrak{v} = -\nabla(p + \Omega) + \mathfrak{k}.$$

Skalar mit $\mathfrak{v}$ multipliziert und längs einer Stromlinie zeitlich integriert ergibt das also wegen $\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{k} = 0$ genau wie oben die Bernoullische Gleichung

$$\frac{\varrho}{2} \mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v} = -p - \Omega + C,$$

wobei wir wieder die Voraussetzung machen, daß C nicht nur längs einer Stromlinie, sondern auch auf den verschiedenen Stromlinien denselben Wert habe. Dann ist also

$$\frac{\varrho}{2} \nabla (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) = -\nabla (p + \Omega)$$

und damit läßt sich der Eulerschen Gleichung die Gestalt geben:

$$\varrho (\mathfrak{v} \cdot \nabla) \mathfrak{v} - \frac{\varrho}{2} \nabla (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v}) = \mathfrak{k}$$

oder, was dasselbe ist

$$\varrho (\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) = \mathfrak{k}.$$

Der Umstand, daß $\mathfrak{k}$ auf $\mathfrak{v}$ senkrecht steht, läßt sich auch so aussprechen, daß $\mathfrak{k}$ bei seiner Wirkung auf ein Flüssigkeitsteilchen keine Arbeit leistet. Das ist der Grund, warum $\mathfrak{k}$ in der Bernoullischen Energiegleichung nicht erscheint.

An Stelle der früheren beiden Bedingungen

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = 0$$

treten jetzt

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} \qquad \text{und} \qquad \varrho (\mathfrak{w} \times \mathfrak{v}) = \mathfrak{k}.$$

Überall, wo $\mathfrak{k}$ verschwindet, haben wir die oben betrachtete Strömung, bei der die vorkommenden Wirbellinien mit Stromlinien zusammenfallen. In der neuen Strömung dagegen sind auch Wirbel zugelassen, deren Achse nicht parallel $\mathfrak{v}$ ist. Die stationäre Strömung aber erfordert dann, daß dort eine Kraft $\varrho (\mathfrak{w} \times \mathfrak{v})$ auftritt. Hätte sie nicht diesen Wert, so könnte die Strömung nicht stationär sein, sondern $\mathfrak{v}$ müßte sich dort mit der Zeit ändern.

Durch diese neuen Bedingungen

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = \mathfrak{k}$$

umfaßt man nun, wie L. Prandtl gezeigt hat [1]), die von ihm angegebenen Vorstellungen der modernen Hydrodynamik, wonach die Flüssigkeit an der Oberfläche eines umströmten Körpers haftet, und in einer sehr dünnen „Übergangsschicht“ die Geschwindigkeit von Null zu den Werten des Geschwindigkeitsfeldes ansteigt, das

1) L. Prandtl, Tragflügeltheorie. Göttinger Nachrichten. 1918. S. 460.

den Gleichungen

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = 0 \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = 0$$

genügt.

In der Übergangsschicht nämlich liegt über dem Oberflächenelement $d\omega$ des Körpers, da die Geschwindigkeit von 0 bis $\mathfrak{v}$ ansteigt, der Wirbel

$$\overline{\mathfrak{w}}\, h\, d\omega = (\mathfrak{n} \times \mathfrak{v})\, d\omega$$

(h Dicke der Übergangsschicht, $\mathfrak{n}$ Normale von der Länge 1 ins Innere der Flüssigkeit, $\overline{\mathfrak{w}}$ ist das Mittel der Wirbeldichte des Säulchens über $d\omega$, also $\overline{\mathfrak{w}}\, h = \int_0^h \mathfrak{w}\, dh$). Seine Wirbelachse steht senkrecht auf der Geschwindigkeit und verlangt deshalb eine äußere Kraft. Um sie zu berechnen müssen wir das Differential des Wirbels nach der Höhe

$$\mathfrak{w}\, dh\, d\omega = (\mathfrak{n} \times d\mathfrak{v})\, d\omega$$

mit $\varrho\mathfrak{v}$ vektoriell multiplizieren und von 0 bis $\mathfrak{v}$ integrieren

$$d\omega\, \varrho \int (\mathfrak{n} \times d\mathfrak{v}) \times \mathfrak{v} = -d\omega\, \varrho \int \mathfrak{v} \cdot d\mathfrak{v}\, \mathfrak{n}$$

$$= \frac{d\omega\, \varrho}{2} (\mathfrak{n} \times \mathfrak{v}) \times \mathfrak{v} = -\frac{d\omega\, \varrho}{2} (\mathfrak{v} \cdot \mathfrak{v})\, \mathfrak{n}.$$

Das ist, wie wir oben gesehen haben, das Entgegengesetzte der Kraft mit der die den Gesetzen

$$\nabla \cdot \mathfrak{v} = 0 \qquad \mathfrak{w} \times \mathfrak{v} = 0$$

folgende Strömung auf das äußere Oberflächenelement der Übergangsschicht drückt, so daß die an den Elementen der Übergangsschicht anzubringenden Kräfte zusammen der Kraft das Gleichgewicht halten, mit der die Strömung auf den Körper wirkt. Diese kann man daher auch durch Integration über die Übergangsschicht in der Form erhalten:

$$-\varrho \int \mathfrak{k}\, d\tau = -\varrho \int (\mathfrak{w} \times \mathfrak{v})\, d\tau \left(\mathfrak{w} = \mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{v}}{dh}\right).$$

L. Prandtl nennt die Wirbel der Übergangsschicht „gebundene Wirbel", weil sie im Gegensatz zu den „freien Wirbeln" nicht mit der Strömung entlang schwimmen. Der Satz von Helmholtz, daß ein Wirbelfaden mit den Flüssigkeitsteilchen schwimmt, aus denen er besteht, gilt für die gebundenen Wirbel nicht; denn die Voraussetzung eines Kräftepotentials der äußeren Kräfte auf der der Helmholtzsche Satz beruht, ist hier nicht erfüllt.

Das Cauchysche „Residuum" liefert uns also in seiner Verallgemeinerung auf drei Dimensionen bei einem Flugzeuge die Resultante von Auftrieb und Widerstand.