

Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens.

by NITSCHKE, J.

in: Numerische Mathematik, (page(s) 346 - 348)

Berlin, Heidelberg [u.a.]; 2003

Terms and Conditions

The Goettingen State and University Library provides access to digitized documents strictly for noncommercial educational, research and private purposes and makes no warranty with regard to their use for other purposes. Some of our collections are protected by copyright. Publication and/or broadcast in any form (including electronic) requires prior written permission from the Goettingen State- and University Library.

Each copy of any part of this document must contain there Terms and Conditions. With the usage of the library's online system to access or download a digitized document you accept there Terms and Conditions.

Reproductions of material on the web site may not be made for or donated to other repositories, nor may be further reproduced without written permission from the Goettingen State- and University Library

For reproduction requests and permissions, please contact us. If citing materials, please give proper attribution of the source.

Contact:

Niedersaechsische Staats- und Universitaetsbibliothek

Digitalisierungszentrum

37070 Goettingen

Germany

Email: gdz@sub.uni-goettingen.de

Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens

J. NITSCHKE

Eingegangen am 5. Oktober 1967

1

Betrachtet wird in einem Hilbert-Raum H die lineare Gleichung

$$(1) \quad Ax = f$$

unter den Voraussetzungen an A :

- i) $D(A)$ dicht in H ;
- ii) A positiv definit und selbstadjungiert;
- iii) A^{-1} vollstetig.

Mit Hilfe des Operators A lassen sich indizierte Normen

$$\|x\|_k = \sqrt{(x, A^k x)}$$

und zugehörige Hilbert-Räume H_k bilden¹.

Unter Zugrundelegen einer aufsteigenden Folge $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{S}_n | n = 1, 2, \dots\}$ von n -dimensionalen Teilräumen liefert das Ritzsche Verfahren für jedes n eine Näherung $x_n = R_n f \in \mathfrak{S}_n$. Der Fehleroperator $\varepsilon_n = A^{-1} - R_n$ kann als Abbildung von H_0 in H_0 bzw. in H_1 aufgefaßt werden. Mit den Eigenwerten $\{\lambda_k\}$ des Operators A gelten die unteren Abschätzungen

$$(2) \quad \begin{aligned} \|\varepsilon_n\|_0 &\geq \lambda_{n+1}^{-1} \\ \|\varepsilon_n\|_1 &\geq \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und die Schranken werden bei Verwenden der Eigenelemente des Operators A als Ansatzfunktionen angenommen.

Existiert zu einer gegebenen Folge \mathfrak{R} eine Folge von Projektionsoperatoren $\{P_n | P_n: H \rightarrow \mathfrak{S}_n\}$ mit

$$(3) \quad \|x - P_n x\|_1 \leq c \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|x\|_2,$$

so ist das Ritz-Verfahren offensichtlich quasi-optimal in bezug auf die 1-Norm (vgl. BABUSKA et al. [1], S. 221 f.). Es ist ja

$$(4) \quad \|x - R_n f\|_1 = \inf_{\xi \in \mathfrak{S}_n} \|\xi - x\|_1 \leq \|P_n x - x\|_1 \leq c \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|x\|_2 = c \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|f\|$$

¹ Bei Anwendung auf Randwertprobleme sind diese Räume i. allg. auch durch Differenzierbarkeitsbedingungen festgelegt. Im Falle des Dirichlet-Problems in einem Gebiet Ω einer elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung gilt z. B.

$$H = H_0 = W_2(\Omega), \quad H_1 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega), \quad H_2 = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \cap W_2^2(\Omega).$$

und damit

$$(5) \quad \|\varepsilon_n\|_1 \leq c \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}}.$$

Wie unten gezeigt wird, ist die Bedingung (3) aber auch hinreichend für die Quasi-Optimalität des Ritz-Verfahrens in bezug auf die 0-Norm. Dieses Ergebnis läßt sich noch anders formulieren. Der Ritz-Operator R_n ist ein linearer Operator. Mit (5) gilt daher auch (3) bei $P_n = R_n$. So ergibt sich der

Satz. Ist das Ritzsche Verfahren quasi-optimal in bezug auf die 1-Norm, so gilt dasselbe in bezug auf die 0-Norm.

2

Die Ritz-Näherung x_n ist als Element von \mathfrak{S}_n durch die Beziehung

$$(6) \quad (\xi, A x_n - f) = 0, \quad \xi \in \mathfrak{S}_n$$

charakterisiert. Nach Einsetzen von $f = A x$ kann für (6) mit der Abkürzung $z_n = x_n - x$ auch

$$(\xi, A z_n) = 0, \quad \xi \in \mathfrak{S}_n$$

geschrieben werden.

Mit $\xi = P_n y = y - (y - P_n y)$ wird daraus

$$(y, A z_n) = (y - P_n y, A z_n).$$

Jetzt werde speziell $y = A^{-1} z_n$ gesetzt:

$$\|z_n\|^2 = ((I - P_n) A^{-1} z_n, A z_n).$$

Unter Zuhilfenahme der Voraussetzung (3) ergeben sich schrittweise die Abschätzungen

$$\|z_n\|^2 \leq \|(I - P_n) A^{-1} z_n\|_1 \|z_n\|_1 \leq c \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|A^{-1} z_n\|_2 \|z_n\|_1 = c \lambda_{n+1}^{-\frac{1}{2}} \|z_n\| \|z_n\|_1.$$

Nach Kürzen des Faktors $\|z_n\|$ und unter Berücksichtigung von $z_n = -(x - R_n f)$ in (4) ergibt sich wie behauptet

$$\|z_n\| \leq c^2 \lambda_{n+1}^{-1} \|f\|$$

bzw.

$$\|\varepsilon_n\|_0 \leq c^2 \lambda_{n+1}^{-1}.$$

3

B sei ein im Sinne von MICHLIN [3] zu A ähnlicher Operator, d.h. B erfülle die gleichen Voraussetzungen wie A und es existiere ein $c > 0$ mit

$$c^{-1}(x, A^k x) \leq (x, B^k x) \leq c(x, A^k x) \quad k = 1, 2 \quad \text{und} \quad x \in D(A).$$

Dann gilt für die Eigenwerte μ_n von B analog

$$c^{-1} \lambda_n \leq \mu_n \leq c \lambda_n.$$

Wird für \mathfrak{S}_n der von den n ersten Eigenelementen von B aufgespannte Teilraum gewählt, so ist (3) erfüllt und das Ritz-Verfahren demnach zu der 0- und 1-Norm

quasi-optimal. Für die Orthogonal-Projektion P_n gilt nämlich

$$\begin{aligned} \|x - P_n x\|_1^2 &\leq c((x - P_n x), B(x - P_n x)) \leq c \mu_{n+1}^{-1} \|B x\|^2 \\ &\leq c^2 \mu_{n+1}^{-1} \|x\|_2^2 && \leq c^3 \lambda_{n+1}^{-1} \|x\|_2^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen der vorliegenden Arbeit lassen sich bei dieser Wahl von \mathfrak{S}_n auch aus den Ergebnissen von DZISKARIANI [2] und VAINIKKO [4] entnehmen. Wegen der Aussage in bezug auf die 1-Norm vgl. auch die Ausführungen in BABUSKA et al. [1], S. 226–241.

Literatur

1. BABUSKA, I., M. PRAGER, and E. VITASEK: Numerical processes in differential equations. SNTL-Publishers of Technical Literature, Prague. London-New York-Sydney: Interscience Publishers 1966.
2. DZISKARIANI, A. V.: On the rate of convergence of the Bubnov-Galerkin method. Zh. vych. mat. **4**, No. 2, 343–348 (1964).
3. MICHLIN, S. G.: Zur Ritzschen Methode. Dokl. Akad. Nauk SSSR, **106**, No. 3, 391–394 (1956).
4. VAINIKKO, G.: Certain estimates for the error in the Bubnov-Galerkin method. I. Asymptotic estimates; II. Estimates of the n -th approximation. Tartu Riikl. Üli. Toimetised No. **150**, 188–201 und 202–215 (1964).

Prof. Dr. J. NITSCHÉ
 Institut für Angewandte Mathematik
 der Albert-Ludwigs-Universität
 7800 Freiburg i. Br., Hebelstr. 40