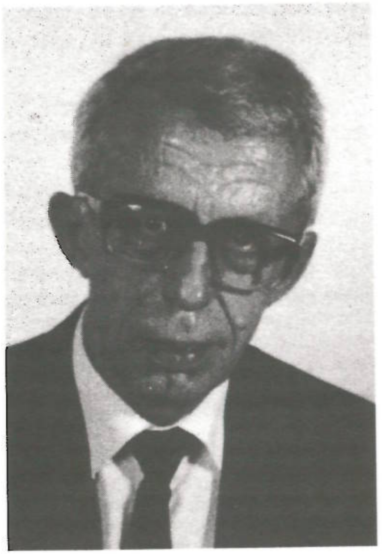
Jber. d. Dt. Math.-Verein. 99 (1997) 90–100

Joachim A. Nitsche (1926–1996)

H. Amann, Zürich, H.-P. Helfrich, Bonn, R. Scholz, Freiburg (Brsg.)



Nach schwerer Krankheit, die ihn für die letzten fünf Jahre seines Lebens an den Rollstuhl fesselte, verstarb Joachim A. Nitsche am 12. Januar 1996 in seinem Haus in Freiburg.

1 Lebenslauf

Joachim Nitsche wurde am 2. September 1926 in Nossen/Sachsen geboren, wo seine Eltern als Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik tätig waren. Mit siebzehn Jahren wurde er zur Wehrmacht einberufen und erlebte dann das Kriegsende in Gefangenschaft. Im Jahre 1946 machte er in Bischofswerda das Abitur und immatrikulierte sich im Sommersemester 1947 für das Studium der Mathematik an der Universität Göttingen. Nach nur sechs Semestern erwarb er das Diplom. Für die

unter Anleitung von F. Rellich abgefaßte Diplomarbeit wurde ihm eine Auszeichnung verliehen.

In Göttingen erhielt er eine erste Einführung in die Differentialgeometrie durch eine Vorlesung von W. Haak, welche dieser im Rahmen einer Gastprofessur gab. Angezogen von diesem Gebiet folgte er nach seinem Diplom Haak an die Technische Hochschule Berlin-Charlottenburg, die spätere TU Berlin. Bereits 1951 wurde er zum Dr. rer. nat. promoviert aufgrund der von ihm vorgelegten Arbeit „Integralrelationen für Systeme quasilinearer Differentialgleichungen 1. Ordnung vom elliptischen Typus in zwei Variablen mit einer Anwendung auf die Einbettung von Flächen bei gegebenem Linienelement positiver Krümmung“, für die ihm wieder eine Auszeichnung verliehen wurde.

Einbettungs- und Starrheitssätze, sowie damit zusammenhängende Probleme aus dem Bereich der partiellen Differentialgleichungen, definierten während der nächsten sechs bis sieben Jahre das Hauptarbeitsgebiet von J. Nitsche. Nach der Promotion wechselte er auf eine Assistentenstelle an der Freien Universität Berlin. Dort wurde ihm 1953 für seine Habilitationsschrift „Randwertprobleme für die Einbettung und Verbiegung positiv gekrümmter berandeter Flächenstücke“ die Venia Legendi verliehen. Diese Arbeit entstand unter dem Einfluß von W. Blaschke, den er als seinen „inoffiziellen“ Lehrer und Betreuer ansah, während sein „formeller“ Betreuer F.W. Levi war.

Im Jahr 1952 verheiratete sich Joachim Nitsche mit Gisela Lange. Aus der Ehe gingen drei Kinder hervor.

Von 1955 bis 1957 hatte Nitsche eine Diätendozentur an der Freien Universität inne, die er dann zugunsten einer Tätigkeit bei IBM in Böblingen aufgab. Dort wurde er mit Fragestellungen der Angewandten Mathematik vertraut, insbesondere mit Problemen, die sich beim Einsatz moderner Rechenanlagen zur praktischen Lösung konkreter Aufgaben ergeben. Dies führte zu einer weitgehenden Neuorientierung seiner wissenschaftlichen Interessen. Von nun an bildeten theoretische Untersuchungen zur Numerischen Mathematik sein Hauptforschungsgebiet. Hierbei verband er seine alte Liebe zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen mit dem neuen Aspekt der effektiven numerischen Bestimmung von Lösungen solcher Gleichungen. Mit seinen Arbeiten über die Methode der finiten Elemente, die in den folgenden Jahren entstanden, eroberte er sich einen Platz in der ersten Reihe der Angewandten Mathematiker.

Von Böblingen wurde J. Nitsche 1958 durch H. Görtler auf eine apl. Professur an die Universität Freiburg geholt. Dort erreichte ihn 1962 ein Ruf auf die Lehrkanzel „Moderne Rechentechnik“ an der Technischen Universität Wien. Der Universität Freiburg gelang es jedoch, ihn zu halten, indem sie ihn im selben Jahr auf einen Lehrstuhl für Angewandte Mathematik berief. Nitsche blieb Freiburg bis zu seiner Emeritierung im Jahr 1991 treu, auch als das Land Nordrhein-Westfalen ihm 1975 eine Stelle als Leiter des Instituts für Mathematik bei der Gesellschaft für Mathematik und Datenverarbeitung in Verbindung mit einem Lehrstuhl an der Universität Bonn offerierte.

Wie bereits erwähnt, bildeten während der Freiburger Zeit Fragestellungen aus dem Bereich der Numerischen Mathematik das Hauptarbeitsgebiet J. Nitsches. Neben Approximationsaussagen im Bereich der Spline-Funktionen widmete er sich eingehend der Theorie der finiten Elemente zur Lösung elliptischer und parabolischer Differentialgleichungen. Auf diesem Gebiet gehörte er zu den weltweit führenden Forschern. Er hatte engen Kontakt zu zahlreichen Fachkollegen und war häufig eingeladener Redner auf einschlägigen Kongressen. International sehr beachtet wurden die beiden von ihm 1977 und 1980 am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach veranstalteten Tagungen über finite Elemente.

Joachim Nitsche war ein engagierter Lehrer. Neben Anfängervorlesungen über Analysis und Lineare Algebra, sowie den Standardvorlesungen über Numerische Mathematik, bot er immer wieder Spezialvorlesungen und Seminare über Gegenstände der aktuellen Forschung an, welche die Hörer zu eigener wissenschaftlicher Tätigkeit anregten. In den ersten Freiburger Jahren gehörten auch Kurse über Spieltheorie und Unternehmensforschung zu seinem Vorlesungsrepertoire.

Zusätzlich zu den üblichen Tätigkeiten in der akademischen Selbstverwaltung – in den Jahren 1971 und 1972 bekleidete er das Amt des Dekans der Mathematischen Fakultät – übernahm er auch Aufgaben im Bereich der wissenschaftlichen Selbstverwaltung. So war er Mitherausgeber der Zeitschriften „Numerical Functional Analysis and Optimization“, „Japan Journal of Applied Mathematics“ und „RAIRO – Analyse Numérique“, sowie der Reihe „Pitman Research Notes in Mathematics“ und der im selben Verlag erscheinenden Buchreihe „Monographs and Studies in Mathematics“.

2 Das wissenschaftliche Werk

Wie bereits oben festgestellt, können die Publikationen Joachim Nitsches im Wesentlichen in zwei Kategorien eingeteilt werden: in Arbeiten rein analytischer Natur und in theoretische Untersuchungen von Fragestellungen, welche die Numerische Mathematik betreffen. Darüber hinaus gibt es vereinzelte Beiträge zur Spieltheorie ([22]) und zu Optimierungsfragen ([14, 21]).

2.a Die analytischen Arbeiten

Die Mehrzahl der analytischen Arbeiten entstand in der Berliner Zeit und behandelt Fragen der Flächenverbiegung und damit zusammenhängende Aufgaben aus der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ([1–13, 16, 19]), wobei einige der späteren Arbeiten aus dieser Zeit gemeinsam mit dem Bruder Johannes C.C. Nitsche abgefaßt sind.

Berandete Flächenstücke mit vorgegebener Metrik lassen isometrische Deformationen zu. Nitsche untersucht die Frage, durch welche Eigenschaften sich die verschiedenen Verbiegungen unterscheiden, bzw. wie sich die möglichen Einbettungen realisieren lassen. Die Bestimmung von Biegeflächen ist äquivalent zum Auffinden von Lösungen der Gauß-Codazzi Gleichungen, welche er durch geeignete Elimination in ein quasilineares System zweier partieller Differentialgleichungen in zwei Variablen überführt. Dieses System ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem ob die Gaußsche Krümmung der Fläche positiv, null oder negativ ist. Nitsche studiert vor allem den Fall positiver Krümmung. Er leitet Integralrelationen her, welchen die Lösungen des Problems genügen müssen, und die geometrische Größen, wie z.B. die Krümmung der Randkurve, enthalten. Dann zeigt er, daß einfach zusammenhängende Flächenstücke mit vorgegebener Metrik durch die Krümmung der Randkurve eindeutig bestimmt sind. Durch geschickte Transformationen kann er das zugehörige quasilineare elliptische System auf ein semilineares in Normalform reduzieren, das dann mittels Iteration gelöst wird. Auf diese Weise gewinnt er unter geeigneten Kleinheitsbedingungen auch Existenzsätze.

In [8] zeigt er, daß im Fall zweifach zusammenhängender Flächenstücke die Eindeutigkeit nicht mehr gewährleistet sein muß. Im Fall der isometrischen Verbiegung einer Kugelzone kann er mittels Bifurkationsmethoden nachweisen, daß die dem Problem zugeordnete Integrodifferentialgleichung in der Nachbarschaft der unverbogenen Kugelzone unter gewissen geometrischen Bedingungen genau zwei Lösungen besitzt.

Während seiner Freiburger Jahre hat Joachim Nitsche noch zwei rein analytische Arbeiten publiziert. In [66] gibt er einen einfachen und eleganten Beweis für die zweite Kornsche Ungleichung. Hierbei handelt es sich um eine Koerzivitätsungleichung für den Dehnungstensor der linearen Elastizitätstheorie, wobei keinerlei Randbedingungen auferlegt werden. Durch eine elementare Spiegelungsmethode führt er die allgemeine Situation auf den Fall Dirichletscher Nullrandbedingungen zurück.

Auch in seiner letzten analytischen Publikation [73] ist es sein Anliegen, elementare Beweise für bekannte Regularitätsaussagen zu geben.

2.b Arbeiten zur Numerik

Die ersten Arbeiten [15, 20] von Joachim Nitsche zur Numerik sind wohl im Zusammenhang mit seiner Tätigkeit bei IBM in Böblingen zu sehen und behandeln Fehlerabschätzungen zu Eigenwertproblemen bei Matrizen.

Etwa zur gleichen Zeit verfaßte er mit Johannes C.C. Nitsche einen Artikel [17] zu Konvergenzabschätzungen für Differenzenverfahren bei partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typ in zwei Raumdimensionen. Die Differenzenlösung zur Maschenweite h wird durch geeignete trigonometrische Interpolation auf einen Teilraum der Dimension $n = O(h^2)$ fortgesetzt. Mit Hilfe von Einbettungssätzen für Sobolevräume mit gebrochenem Index kann unter sehr schwachen Voraussetzungen an die Koeffizientenfunktionen Konvergenz in der Maximumnorm gezeigt werden. Für die rechte Seite f wird dabei nur Quadratintegrierbarkeit vorausgesetzt. Dies bedingt, daß zur Diskretisierung die Funktionswerte durch Integralmittelwerte ersetzt werden müssen. Die numerische Berechnung der Integrale wird in [18] diskutiert.

Einige Jahre später kommt Joachim Nitsche auf diesen Fragenkreis unter dem neuen Gesichtspunkt zurück, die Konvergenzordnung im Zusammenhang mit Regularität und Approximierbarkeit der Lösungen der Differentialgleichungen zu sehen. Insbesondere ist die Frage nach quasi-optimalen Fehlerabschätzungen eines der zentralen Themen in seinen Arbeiten der nächsten Jahre. Fehlerabschätzungen für eine Folge u_n von numerischen Lösungen in Teilräumen der Dimension n haben im allgemeinen die Form $\|u_n - u\| \leq c_n\|f\|$ für lineare Gleichungen $Au = f$. Der n-dimensionale Durchmesser d_n der Menge $\{u \mid \|Au\| \leq 1\}$ ist eine untere Schranke für die Fehlerfaktoren c_n. Ein Verfahren heißt *quasi-optimal*, wenn $c_n = O(d_n)$ gilt.

Joachim Nitsche [25, 26, 32] kann das frühere Ergebnis [17] für die Fehlerordnung von $O(h^{2/5})$ auf $O(h^2)$ verbessern und zeigen, daß diese Abschätzung bezüglich der L_2-Norm quasi-optimal ist, wenn über die rechte Seite nur $f \in L_2$ vorausgesetzt wird.

Nach den Differenzenverfahren geht Joachim Nitsche in [24, 28, 30, 31] dazu über, das Problem der Quasi-Optimalität für projektive Verfahren (Ritz-, Galerkin- und Fehlerquadratmethode) zunächst für den abstrakten Fall eines selbstadjungierten Operators A im Hilbertraum zu behandeln. Neben der Optimalität geht es um Fragen der Stabilität, der Defektkonvergenz und des Vergleichs der verschiedenen Methoden. In diesem Zusammenhang entsteht auch die ebenso berühmte wie kurze Arbeit [27], in der in abstrakter Weise gezeigt wird, daß die Quasi-Optimalität der Ritz-Methode in der Energienorm auch diejenige in der ursprünglichen Norm impliziert. Diese Beweistechnik wird später als *Nitsche-Trick* bezeichnet. Für finite Elemente folgt hiermit, daß Konvergenz in der L_2-Norm um eine h-Potenz besser ist als in der H^1-Norm. J. Nitsche kann in [40] zeigen, daß Quasi-Optimalität in der L_2-Norm diese auch in stärkeren Normen impliziert, falls die Teilräume geeigneten inversen Abschätzungen genügen, wie sie aus der klassischen Approximationstheorie für trigonometrische Funktionen bekannt sind.

In diese Zeit fallen auch einige Untersuchungen über die Frage, wie die Approximationsgüte von Splinefunktionen [33, 35, 36, 37] mit der Regularität der zu approximierenden Funktionen zusammenhängt sowie eine Arbeit [38] zur Konvergenz des Galerkinverfahrens bei nichtlinearen Gleichungen.

Über weitere Arbeiten zu Splinefunktionen [29, 34] gelangt J. Nitsche zu seinem Hauptarbeitsgebiet der nächsten zwanzig Jahre, nämlich zu seinen Untersuchungen von Konvergenzeigenschaften finiter Elemente, durch die er international berühmt wird. In [39] findet sich erstmals der Beweis, daß für lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Fehler von der Größenordnung $O(h^2)$ in der L_2-Norm und $O(h)$ in der L_∞-Norm ist. Diese L_∞-Abschätzung wird unter Verwendung von inversen Abschätzungen aus der L_2-Abschätzung hergeleitet. Alle Abschätzungen erweisen sich unter der Vorausetzung, daß die rechte Seite in L_2 liegt, als quasi-optimal.

Die anschließenden Arbeiten sind der Frage gewidmet, wie Randbedingungen bei projektiven Verfahren zu berücksichtigen sind, wenn die Ansatzräume diesen Bedingungen nicht genügen. Durch Einbeziehung der Randbedingungen in den Variationsansatz und geschickte Wahl von gewichteten Randintegralen kann J. Nitsche in [41] zeigen, daß die Konvergenzordnung $O(h^2)$ für lineare Splines erhalten bleibt. Erweiterungen dieser Untersuchungen finden sich in [42, 44, 47] und in einer mit J.H. Bramble verfaßten Arbeit über die Fehlerquadratmethode [42]. In einer späteren Arbeit [57] greift Nitsche die Behandlung der Randbedingungen, diesmal für das Plattenproblem, wieder auf.

Zusammen mit A.H. Schatz, und später mit J.H. Bramble, behandelt er in [43, 45, 46] dann die Frage, ob lokal bessere Regularitätseigenschaften der Lösung auch lokal bessere Konvergenzeigenschaften bedingen. Es zeigt sich, daß die Situation bei finiten Elementen im allgemeinen günstiger als im klassischen Fall der Fourierapproximation ist, bei der eine Singularität Einfluß auf das globale Konvergenzverhalten hat. Lokal höhere Regularität bedingt bei elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen, wie J. Nitsche [64] später zeigt, ein lokal besseres Approximationsverhalten.

Anders sieht die Situation bei Differentialgleichungen mit Singularitäten in den Koeffizientenfunktionen oder in Gebieten mit Ecken aus. In [48, 55] kann er zeigen, daß in solchen Fällen auch das globale Konvergenzverhalten verschlechtert wird. Für nichtlineare Probleme werden solche Untersuchungen in [71] durchgeführt.

Etwas später wendet sich Joachim Nitsche L_∞-Abschätzungen für parabolische Gleichungen [58,70] zu. Einen breiteren Raum nehmen dabei zeitabhängige Probleme für freie Ränder, wie sie beim Stefan-Problem auftreten, ein. Fehlerabschätzungen für den ein- und den zweidimensionalen Fall [60, 61, 62, 63, 65, 67, 69, 72] werden durch Transformation auf den Fall fester Ränder zurückgeführt, wonach dann eine nichtlineare parabolische Differentialgleichung zu behandeln ist. Auch hier treten Singularitäten auf, deren Auswirkungen auf das Konvergenzverhalten sorgfältig analysiert werden.

2.c L_∞-Abschätzungen

Ein Schwerpunkt der Forschung von Joachim Nitsche im Bereich der Finite-Elemente-Methoden sind Konvergenzuntersuchungen in L_∞-Normen.

Projektionsverfahren, wie die Methode von Ritz für elliptische Randwertprobleme oder das Galerkin-Verfahren für parabolische Anfangs-Randwertprobleme, sind im Rahmen der Theorie partieller Differentialgleichungen in natürlicher Weise mittels L_2-Normen formuliert. Aus diesem Grund ergeben sich Konvergenzaussagen zunächst in den entsprechenden L_2-Normen, während das Konvergenzverhalten in L_p-Normen, speziell in der L_∞-Norm, gesondert untersucht werden muß.

Bis in die Mitte der siebziger Jahre wurde die Konvergenz finiter Elemente in mehreren Raumdimensionen hauptsächlich in der L_2- und in den H^k-Normen untersucht. Abgesehen von dem vergleichsweise einfachen eindimensionalen Fall werden L_∞-Abschätzungen durch Anwendung von Einbettungssätzen und inversen Abschätzungen für die Ansatzräume gewonnen. Wie bereits erwähnt, liefern diese Methoden quasi-optimale Abschätzungen für den Fall, daß die rechte Seite in L_2 bzw. die Lösung in H^2 liegt. Die mit J.H. Bramble und A.H. Schatz abgefaßte Arbeit [50] über „innere" L_∞-Abschätzungen lieferte erste Ansätze für die Behandlung des Falles, daß die Lösung im Raum W^2_∞ liegt. Die Frage nach optimalen Abschätzungen in der L_∞-Norm unter dieser Voraussetzung galt als sehr schwierig und spornte zu jenem Zeitpunkt viele Mathematiker an.

Um quasi-optimale Konvergenzordnungen zu beweisen, haben sich, zumindest für elliptische Randwertprobleme zweiter Ordnung, etwa zeitgleich zwei Methoden herausgeschält: die der Regularisierung der Greenschen Funktion und das Verfahren der gewichteten L_2-Normen. Die letztere Methode wird von Nitsche ausgebaut, verfeinert und auf andere Fragestellungen übertragen.

In einer Reihe von Arbeiten werden zunächst Konvergenzaussagen für die Ritz-Näherung der Lösung der Laplace-Gleichung bewiesen. In [49] wird gezeigt, daß für finite Elemente der Ordnung $r \geq 3$ die asymptotische Konvergenz der Ritz-Näherung quasi-optimal ist. Der Fall linearer finiter Elemente ist schwieriger zu behandeln.

In [52] beweist Nitsche, daß für $r = 2$, bis auf einen logarithmischen Faktor, ebenfalls Quasi-Optimalität gilt, und leitet eine entsprechende Abschätzung für Variationsungleichungen her. In [56] wird das Ergebnis für die Laplace-Gleichung dahingehend verbessert, daß in der Fehlerabschätzung die L_∞-Normen der zweiten Ableitungen der Lösung durch die L_∞-Norm der rechten Seite der Differentialgleichung ersetzt wird.

Diese Abschätzungen waren technisch so aufwendig, daß Ciarlet für sein Buch über Finite Elemente Nitsche um eine vereinfachte Version bat, die dort niedergeschrieben ist.

In [51] werden Fehlerabschätzungen für die Elastizitätsgleichungen bewiesen, und in [54] werden die Ergebnisse für das lineare elliptische Problem zweiter Ordnung auf nichtlineare elliptische Randwer tprobleme in Divergenzform übertragen. Schließlich zeigt Nitsche in [68], daß aus seinen Resultaten folgt, daß der Ritz-Operator (bis auf einen logarithmischen Term im Falle linearer finiter Elemente) in der L_∞-Norm und in Hölder- bzw. Lipschitz-Normen beschränkt ist, ein Resultat, das teilweise zuvor mit anderen Methoden bewies en worden war.

In [58, 59] und in der gemeinsam mit mit M.F. Wheeler abgefaßten Arbeit [70] widmet sich Nitsche der Frage asymptotischer Fehlerabschätzungen in der $L_\infty(L_\infty)$-Norm (d.h. in der Supremumsnorm bzgl. der Zeit und des Raums) für die Galerkin-Approximationen der Lösungen linearer parabolischer Anfangs-Randwertprobleme. Hierbei werden die Methoden der gewichteten L_2-Normen geeignet übertragen. Schließlich behandelt er in einigen Arbeiten das Stefan-Problem in einer Raumdimension und beweist u.a. in [60] auch L_∞-Abschätzungen für die Galerkin-Näherung der Lösung dieses Problems.

In [74] diskutiert er die Anwendung von Methoden der finiten Elemente auf singuläre Integraloperatoren, wie sie in der Theorie der konformen Abbildungen auftreten. Solche Gleichungen passen nicht in die gängige Theorie der finiten Elemente, da weder Ungleichungen vom Gårdingschen Typ noch die üblichen Shifttheoreme für partielle Differentialgleichungen gelten. Nitsche zeigt auf, wie diese Gleichungen mit der abstrakten Theorie der finiten Elemente behandelt werden können. Mittels des Verfahrens der gewichteten Normen beweist er, daß der Galerkin-Operator in der L_∞-Norm beschränkt ist, und überträgt dieses Ergebnis mit Methoden von Arbeit [40] auf Hölder-Normen.

2.d Bei J. A. Nitsche entstandene Dissertationen

1. Herbert Amann, Monte-Carlo-Methoden zur Lösung des Dirichlet-Problems, Freiburg, WS 1965/66.
2. Hans-Peter Helfrich, Optimale lineare Approximation beschränkter Mengen in normierten Räumen, Freiburg, SS 1969.
3. Albrecht von Plehwe, Über das Galerkin-Verfahren zur genäherten Lösung von Anfangswertproblemen für Differentialgleichungen erster Ordnung im Hilbertraum, Freiburg, SS 1970.
4. Reinhard Scholz, Approximation mit Spline-Funktionen in gewichteten Lebesgue-Räumen über dem Intervall $(0, \infty)$, Freiburg, WS 1971/72.
5. Reinhardt Link, Asymptotische Fehlerdarstellungen bei Approximationsverfahren mit Spline-Funktionen, Freiburg, WS 1974/75.
6. Jürgen Schormann, Vergleich der Normen von Galerkin- und Ritz-Operatoren, Freiburg, SS 1975.

7. Fritz Grenacher, Über die Konvergenz bei Regularisierungsverfahren für nicht sachgemäß gestellte Anfangswertprobleme, Freiburg, WS 1976/77.
8. Dieter Brandt, Pollution-Effekte bei der Anwendung des Galerkinverfahrens auf singuläre nichtlineare Dirchlet-Randwertprobleme, Freiburg, WS 1978/79.
9. Klaus Braun, Lokale Konvergenz der Ritz-Projektion auf Finite Elemente für Pseudo-Differentialgleichungen negativer Ordnung, Freiburg, SS 1985.
10. Sigrid Lang, L_∞-Konvergenz der Finite-Element-Methode für das Kapillarflächenproblem, Freiburg, WS 1991/92 (abgeschlossen unter G. Dziuk).

Publikationen von Joachim A. Nitsche

[1] Bestimmung der Flächen, deren Bogenelement negativer Krümmung als Quadratsumme zweier Pfaffscher Formen gegeben ist. *Archiv d. Math.*, 3:50–59, 1952.

[2] Beiträge zum Randwertproblem quasilinearer elliptischer Differentialgleichungssysteme. *Math. Nachr.*, 7:35–54, 1952.

[3] Das erste Randwertproblem eines linearen elliptischen Differentialgleichungssystems. *Math. Nachr.*, 7:31–33, 1952.

[4] Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. *Archiv d. Math.*, 4:331–336, 1953.

[5] Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. II. *Archiv d. Math.*, 6:13–17, 1954.

[6] Ein mit der Verbiegung der Halbkugel verbundenes Randwertproblem. III. *Archiv d. Math.*, 6:145–150, 1955.

[7] Randwertprobleme für die Verbiegung positiv gekrümmter Flächenstücke. *Math. Z.*, 60:353–366, 1954.

[8] Beiträge zur Verbiegung zweifach zusammenhängender Flächenstücke. *Math. Z.*, 62:388–399, 1955.

[9] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Ein Satz über die Normalen der Niveauflächen einer Potentialfunktion. *J. Rat. Mech. Analysis*, 2:115–124, 1953.

[10] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Allgemeine Randwertprobleme für Systeme elliptischer Differentialgleichungen; die Zurückführung auf eine von F. Noether untersuchte Klasse singulärer Integralgleichungen. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II. Ser.*, 2:40–45, 1953.

[11] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Bemerkungen zum zweiten Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta\varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2$. *Math. Ann.*, 126:69–74, 1953.

[12] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Das zweite Randwertproblem der Differentialgleichung $\Delta u = e^u$. *Archiv d. Math.*, 3:460–464, 1952.

[13] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Fachgebiet: Partielle Differentialgleichungen. In Hermann Ludwig Naas und Josef Schmid, Hrsg., *Mathematisches Wörterbuch*. Akademie Verlag, Berlin, 1961.

[14] Gemeinsam mit E.F. Liebel: Optimale Produktionsprogramme. *Unternehmensforsch.*, 2:70–84, 1958.

[15] Einfache Fehlerschranken beim Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 39:322–325, 1959.

[16] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Ein Kriterium für die Existenz nicht-linearer ganzer Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. *Archiv d. Math.*, 10:294–297, 1959.

[17] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Error estimates for the numerical solution of elliptic differential equations. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 5:293–306, 1960.

[18] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Fehlerabschätzung für die numerische Berechnung von Integralen, die Lösungen elliptischer Differentialgleichungen enthalten. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 5:307–314, 1960.

[19] Gemeinsam mit J.C.C. Nitsche: Über reguläre Variationsprobleme. *Rend. Circ. Mat. Palermo, II Ser.*, 8:346–353, 1960.

[20] Fehlerschranken bei Eigenwertproblemen normalisierbarer Matrizen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 41:320–324, 1961.

[21] Über Optimalisierungsprobleme aus dem Bereich der Statik II. *Unternehmensforsch.*, 6:67–78, 1962.

[22] Das Problem der Dominanz bei Zwei-Personen-Spielen. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie Verw. Geb.*, 6:119–124, 1966.

[23] *Praktische Mathematik*. B.I.-Hochschulskripten 812. Bibliographisches Institut, Mannheim-Zürich, 1968.

[24] Zur Konvergenz des Ritzschen Verfahrens und der Fehlerquadratmethode. I. In *Numerische Mathematik. Differentialgleichungen. Approximationstheorie (Tagungen, Oberwolfach, 1966)*, volume 9 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 97–103, Basel, 1968. Birkhäuser Verlag.

[25] Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren. I. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 16:69–80, 1967.

[26] Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren. In *Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik*, volume 12 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 127–129, Basel, 1969. Birkhäuser Verlag.

[27] Ein Kriterium für die Quasi-Optimalität des Ritzschen Verfahrens. *Numer. Math.*, 11:346–348, 1968.

[28] Bemerkungen zur Approximationsgüte bei projektiven Verfahren. *Math. Z.*, 106:327–331, 1968.

[29] Verfahren von Ritz und Spline-Interpolation bei Sturm-Liouville-Problemen. *Numer. Math.*, 13:260–265, 1969.

[30] Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeit des Ritzschen Verfahrens und der Fehlerquadratmethode. *Z. Angew. Math. Mech.*, 49:591–596, 1969.

[31] Defekt- und Fehlerkonvergenz bei Differenzenapproximationen. *Z. Angew. Math. Mech.*, 49:302–303, 1969.

[32] Zur Frage optimaler Fehlerschranken bei Differenzenverfahren. II. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 16:233–238, 1967.

[33] Sätze vom Jackson-Bernstein-Typ für die Approximation mit Spline-Funktionen. *Math. Z.*, 109:97–106, 1969.

[34] Interpolation in Sobolevschen Funktionenräumen. *Numer. Math.*, 13:334–343, 1969.

[35] Orthogonalreihenentwicklung nach linearen Spline-Funktionen. *J. Appr. Theory*, 2:66–78, 1969.

[36] Eine Bemerkung zur kubischen Spline-Interpolation. In *Abstract Spaces and Approximation (Proc. Conf., Oberwolfach, 1968)*, volume 10 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 367–372, Basel, 1969. Birkhäuser Verlag.

[37] Umkehrsätze für Spline-Approximationen. *Comp. Math.*, 21:400–416, 1969.

[38] Konvergenz des Ritz-Galerkinschen Verfahrens bei nichtlinearen Operatorgleichungen. In *Iterationsverfahren, Numerische Mathematik, Approximationstheorie (Tagung Nichtlineare Aufgaben Numer. Math., Oberwolfach, 1968)*, volume 15 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 75–81, Basel, 1970. Birkhäuser Verlag.

[39] Lineare Spline-Funktionen und die Methoden von Ritz für elliptische Randwertprobleme. *Arch. Rat. Mech. Analysis*, 36:348–355, 1970.

[40] Zur Konvergenz von Näherungsverfahren bezüglich verschiedener Normen. *Numer. Math.*, 15:224–228, 1970.

[41] Über ein Variationsprinzip zur Lösung von Dirichlet-Problemen bei Verwendung von Teilräumen, die keinen Randbedingungen unterworfen sind. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 36:9–15., 1971.

[42] Gemeinsam mit J.H. Bramble: A generalized Ritz-least-squares method for Dirichlet problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 10:81–93, 1973.

[43] Gemeinsam mit A.H. Schatz: On local approximation properties of L_2-projection on spline-subspaces. *Appl. Anal.*, 2:161–168, 1972.

[44] On Dirichlet problems using subspaces with nearly zero boundary conditions. In *The mathematical foundations of the finite element method with applications to partial differential equations (Proc. Sympos., Univ. Maryland, Baltimore, Md., 1972)*, pages 603–627, New York, 1972. Academic Press.

[45] Interior error estimates of projection methods. In *Proceedings of Equadiff III (Third Czechoslovak Conf. Differential Equations and their Applications, Brno, 1972)*, volume 1 of *Folia Fac. Sci. Natur. Univ. Purkynianae Brunensis, Ser. Monograph.*, pages 235–239, Brno, 1974. Purkyne Univ.

[46] Gemeinsam mit A.H. Schatz: Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. *Math. Comp.*, 28:937–958, 1974.

[47] Convergence of nonconforming methods. In *Mathematical aspects of finite elements in partial differential equations (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wisc., 1974)*, pages 15–53, New York, 1974. Academic Press.

[48] Der Einfluß von Randsingularitäten beim Ritzschen Verfahren. *Numer. Math.*, 25:263–278, 1976.

[49] L_∞-convergence of finite element approximation. In *Journées „Elements Finis" (Rennes, 1975), 18 pp.*, Rennes, 1975. Univ. Rennes.

[50] Gemeinsam mit J.H. Bramble und A.H. Schatz: Maximum-norm interior estimates for Ritz-Galerkin methods. *Math. Comp.*, 29:677–688, 1975.

[51] Finite element approximations for solving the elastic problem. In *Computing methods in applied sciences and engineering (Second Internat. Sympos., Versailles, 1975), Part 1.*, volume 134 of *Lecture Notes in Econom. and Math. Systems*, pages 154–167, Berlin, 1976. Springer Verlag.

[52] L_∞-convergence of finite element approximations. In *Mathematical aspects of finite element methods (Proc. Conf., Consiglio Naz. delle Ricerche (C.N.R.), Rome, 1975), Lecture Notes in Math.*, volume 606, pages 261–274, Berlin, 1977. Springer Verlag.

[53] Über L_∞-Abschätzungen von Projektionen auf finite Elemente. In *Finite Elemente (Tagung, Inst. Angew. Math., Univ. Bonn, Bonn, 1975), Bonn. Math. Schrift.*, 89:13–30, 1976.

[54] On L_∞-convergence of finite element approximations to the solution of a nonlinear boundary value problem. In *Topics in numerical analysis, III (Proc. Roy. Irish Acad. Conf., Trinity Coll., Dublin, 1976)*, pages 317–325, London, 1977. Academic Press.

[55] Zur lokalen Konvergenz von Projektionen auf finite Elemente. In *Approximation theory (Proc. Internat. Colloq., Inst. Angew. Math., Univ. Bonn, Bonn), Lecture Notes in Math.*, volume 556, pages 329–346, Berlin, 1976. Springer Verlag.

[56] L_∞-convergence of the Ritz-method with linear finite elements for second-order elliptic boundary value problems. In *Complex analysis and its applications (Russian)*, pages 430–437, 670, Moscow, 1978. „Nauka".

[57] On projection methods for the plate problem. In *Numerical analysis (Proc. Colloq., Lausanne, 1976)*, volume 37 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 49–61, Basel, 1977. Birkhäuser Verlag.

[58] L_∞-convergence of finite element Galerkin approximations for parabolic problems. *RAIRO Anal. Numér.*, 13:31–54, 1979.

[59] L_∞-error analysis for finite elements. In *Mathematics of finite elements and applications, III (Proc. Third MAFELAP Conf., Brunel Univ., Uxbridge, 1978)*, pages 173–186, London, 1979. Academic Press.

[60] Finite element approximations to the one-dimensional Stefan problem. In *Recent advances in numerical analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wisc., 1978)*, volume 41 of *Publ. Math. Res. Center Univ. Wisconsin*, pages 119–142, New York, 1978. Academic Press.

[61] Approximation des eindimensionalen Stefan-Problems durch finite Elemente. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 923–928, Helsinki, 1980. Acad. Sci. Fennica.

[62] Finite element approximations for free boundary problems. In *Computational methods in nonlinear mechanics (Proc. Second Internat. Conf., Univ. Texas, Austin, Tex., 1979)*, pages 341–360, Amsterdam, New York, 1980. North-Holland.

[63] A finite element method for parabolic free boundary problems. In *Free boundary problems, Vol. I (Pavia, 1979)*, pages 277–318, Rome, 1980. Ist. Naz. Alta Mat. Francesco Severi.

[64] Interior error estimates for semidiscrete Galerkin approximations for parabolic equations. *RAIRO Anal. Numér.*, 15:171–176, 1981.

[65] The flow of two immiscible fluids in a one-dimensional porous medium and finite elements. In S.Y. Wang, C.V. Alonso, C.A. Brebbia, W.G. Gray, and G.F. Pinder, editors, *Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in Water Resources*, pages 2.270–2.281. University of Mississipi, 1980.

[66] On Korn's second inequality. *RAIRO Anal. Numér.*, 15:237–248, 1981.

[67] Moving boundary problems and finite elements. In *Numerical treatment of free boundary value problems, Workshop Oberwolfach 1980*, volume 58 of *Internat. Series Numer. Math.*, pages 224–232, Basel, 1982. Birkhäuser Verlag.

[68] Schauder estimates for finite element approximations on second order elliptic boundary value problems. In I. Babuška, J. Osborn, and T.P. Liu, editors, *Proceedings of the Special Year*, volume 20 of *Lecture Notes University of Maryland*, pages 290–343, 1982.

[69] Finite element approximation to the one-phase Stefan problem. In *Free boundary problems: theory and applications, Vol. II (Montecatini, 1981)*, volume 79 of *Research Notes in Mathematics*, pages 601–605, Boston 1983. Pitman Advanced Publishing Program.

[70] Gemeinsam mit Mary F. Wheeler: L_∞-boundedness of the finite element Galerkin operator for parabolic problems. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 4:325–353, 1981/82.

[71] Zur lokalen Konvergenz von Ritz- und Galerkin-Verfahren bei nichtlinearen Problemen. In *Seminar über Finite Elemente bei instationären Problemen, Mitt. Forschungsschwerpunkt Simulation Optimierung Deterministischer Stochastischer Dyn. Syst.*, Band 33, pp. 1–12. 1986.

[72] Free boundary problems for Stokes' flows and finite element methods. In *Differential equations and their applications, Equadiff 6, Proc. 6th Int. Conf., Brno/Czech., 1985*, volume 1192 of *Lect. Notes Math.*, pages 327–332, Berlin, 1986. Springer Verlag.

[73] Direct proofs of some unusual shift-theorems. In *Analyse mathématique et applications, Contrib. Honneur Jacques-Louis Lions*, pages 383–400, Paris, 1988, Gauthier-Villars.

[74] Finite-element methods for conformal mappings. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26:1525–1533, 1989.

H. Amann
Mathematisches Institut der Universität Zürich
Winterthurer Strasse 190
CH-8057 Zürich
e-mail: amann@math.unizh.ch

H.-P. Helfrich
Mathematisches Seminar der Landwirtschaftlichen Fakultät der Universität Bonn
Nußallee 15
D-53115 Bonn
e-mail: helfrich@uni-bonn.de

R. Scholz
Institut für Angewandte Mathematik der Universität Freiburg (Brsg.)
Hermann-Herder-Straße 10
D-79104 Freiburg
e-mail: scholz@mathematik.uni-freiburg.de

(Eingegangen 20. 11. 1996)

Buchbesprechungen

Schiff, J. L., Normal Families (Universitext), Berlin u. a.: Springer-Verlag 1993, 236 S., softcover, DM 58,–

Sometimes we mathematicians are linguistically creative (cf. the clever terminology "amenable" group and "Anschmiegungssatz"), but more often we're lazy. How many "regular" and "normal" things do you know of in the mathematical universe? The subject of this book dates from the early part of this century, from the important work of the long-lived Paul Montel (1876–1975); the book is dedicated to him and contains a wonderful photo of him. The concept of compactness, especially in an abstract environment, had not yet evolved. After it did, the concept of normal family was recognized (by A. Ostrowski) to be just an instance of compactness, but is was too late to legislate a world-wide change in terminology. [Maybe someday these sets will be shown to predominate in the sense of measure or Baire category, and thereby earn their designation "normal".] Anyway, here is the definition. One considers meromorphic functions as maps of open subsets Ω of $\hat{\mathbb{C}}$ into $\hat{\mathbb{C}}$, the (Riemann) sphere equipped with its euclidean (= chordal) metric. Denote this set $M(\Omega)$. It is a $\mathbb{C}$-algebra (after the usual precautions regarding algebraic operations on ∞). Adjoin to it the constant function ∞ and give this set $M_\infty(\Omega)$ the topology of local uniform convergence (= uniform convergence on each compact subset of Ω). It is easy to construct a complete metric ρ that generates this topology. [Since $\rho \leq 2$, there is no meaningful boundedness concept with respect to ρ: boundedness for $\mathbb{C}$-valued functions always means boundedness in $\mathbb{C}$.] A *normal* family is simply a pre-compact subset $\mathscr{F}$ of $M_\infty(\Omega)$, that is, a subset $\mathscr{F}$ whose closure is compact. When we deal with $\Omega \subset \mathbb{C}$ and the smaller class $H(\Omega)$ of holomorphic functions, the definition assumes the traditional form: Every sequence in $\mathscr{F}$ contains a subsequence $\{f_n\}$ such that either f_n converges locally uniformly to an $f \in H(\Omega)$ or $|f_n| \to +\infty$ locally uniformly. If $\mathscr{F}$ is *equicontinuous* on each compact $K \subset \Omega$ (meaning that for each $\varepsilon > 0$, one $\delta = \delta(\varepsilon)$ works for all $f \in \mathscr{F}$), then normality is assured if we can find a subsequence $\{f_n\}$ which converges on a countable dense subset of Ω, and that can usually be accomplished with a diagonal argument. This idea had been used earlier by G. Ascoli and C. Arzela in providing a compactness criterion in $C[0, 1]$. In turn, Cauchy's integral formula shows easily that $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ is equicontinuous on a compact set if it is bounded on a neighborhood of that set. And conversely, equicontinuity on a compact set K together with boundedness of the orbit $\mathscr{F}(k) := \{f(k) : f \in \mathscr{F}\}$ of at least one point $k \in K$ implies boundedness of $\mathscr{F}$ on K. The appropriate boundedness condition equivalent to normality for a family $\mathscr{F} \subset M(\Omega)$ is that the set $\{f^\# : f \in \mathscr{F}\}$ of spherical derivatives $f^\# := |f'|/(1 + |f|^2)$ be locally bounded. But as a sufficient condition, boundedness can be dramatically weakened. Various avatars of the following 1912 theorem of Montel's are called by the author the Fundamental Normality Test (FNT): $\mathscr{F} \subset H(\Omega)$ is normal if there exist two distinct complex numbers a, b which each function in $\mathscr{F}$ "omits", that is, all orbits lie in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$. Initially this was reduced to the local boundedness condition by a covering-space argument, the disk $\mathbb{D}$ covering $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ under a modular function; the same modular function that E. Picard had earlier used to prove his great theorem. For meromorphic functions with ∞ an allowed value the corresponding hypothesis is the omission of three values. Altogether the author gives five proofs of this seminal theorem, from five different points of view. The search for an elementary proof of Picard's theorem culminated in F. Schottky's theorem, which provides universal constants $c\ (a,\ r) < +\infty$ such that $|f(z)| \leq c(a, r)$ whenever $f \in H(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}, f(0) = a$ and $|z| \leq r < 1$. In the same way that it simplifies Picard, this theorem trivialized the proof of Montel's FNT,