Numer. Math. 25, 263–278 (1976)

Der Einfluß von Randsingularitäten beim Ritzschen Verfahren

J. A. Nitsche*

Received March 4, 1975

Sollution Effects of the Ritz Method

Summary. Discussed is the Ritz-method for a Sturm-Liouville problem with one singular boundary point. It is shown that the error locally admits the expansion

$$e \approx \varkappa_h y_2 + O(h^{n+1})$$

with n being the degree of the spline subspaces used. y_2 is a special solution of the homogeneous differential equation. Depending on the data $\varkappa_h$ may be of order $h^{1+\varepsilon}$ with $\varepsilon > 0$ arbitrary small and $\varkappa_h$ cannot be eliminated by extrapolation.

0. Einführung

Von verschiedenen Autoren wurde der Einfluß der Regularität des Randes auf die Konvergenz von Differenzen-Approximationen für elliptische Randwertprobleme untersucht — vgl. z.B. Laasonen [18–20], Veidinger [30–32], Volkov [33] und für das entsprechende Eigenwertproblem Bramble-Hubbard [6], Forsythe [15] und Reid-Walsh [28]. Im typischen Fall eines L-förmigen Gebietes ist der Fehler der Lösung von der Ordnung $h^{2/3}$ und der der Eigenwerte von $h^{4/3}$. Dasselbe Phänomen tritt bei der Methode der finiten Elemente auf, wie in Babuska [2] und Oganesjan-Ruhovec [26] gezeigt wird. Der Vollständigkeit halber seien die Arbeiten Babuska [1], Babuska-Kellogg [3], Babuska-Rosenzweig [4] und Fix [14] genannt, in denen verschiedene Modifikationen zur Verbesserung der Konvergenz der Methode der finiten Elemente angegeben sind.

Eine gewisse Analogie besteht im Fall singulärer Randwert-Probleme für gewöhnliche Differentialgleichungen. Im Hinblick auf Differenzen-Verfahren vgl. dazu Bagmut [5], Jamet [16], Natterer [21, 22] und im Hinblick auf die Methoden der finiten Elemente Ciarlet-Natterer-Varga [7], Crouzeix-Thomas [8] und Daily-Pierce [9].

Es erscheint von besonderem Interesse, in welcher Weise der Rand oder eine Singularität die Approximation beeinflußt, d.h. ob der Einfluß auf die unmittelbare Umgebung eines kritischen Punktes beschränkt ist oder aber Auswirkungen in dem gesamten Gebiet auftreten. In der vorliegenden Arbeit behandeln wir die Frage für singuläre Randwertprobleme

$$L y = -(p y')' + q y = f \quad \text{in } (0, 1),$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

* Die Arbeit entstand während eines Gastaufenthalts am Mathematical Research Center, University of Madison, U.S.A.

mit dem Verhalten

$$p(x) \approx x^\alpha, \quad q(x) \approx \gamma\, x^{\alpha-2} \quad (\alpha, \gamma > 0)$$

bei $x=0$. Wie sich herausstellt, hat der Fehler $e_h = y - y_h$ zwischen der exakten Lösung y und der Ritz-Approximation $y_h \in S_h$ das Verhalten

$$e_h \approx \varkappa_h\, y_2 + O(h^{n+1}),$$

die Approximations-Räume S_h sind dabei Splines vom Grade n. y_2 ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $Ly=0$, welche die Randbedingung bei $x=1$ erfüllt. Im Abschnitt 5 wird gezeigt, daß im allgemeinen eine Elimination des Störgliedes $\varkappa_h y_2$ durch Extrapolation nicht möglich ist, welches, je nach Problem, z. B. von der Größenordnung $h^{1+\varepsilon}$ sein kann. Einige Zahlenbeispiele sind in Abschnitt 4 zusammengestellt.

Im Falle von Differentialoperatoren höherer Ordnung oder Singularitäten an beiden Randpunkten ergäbe sich entsprechend

$$e_h \approx \sum_1^N \varkappa_h^{(i)}\, y_{(i)} + O(h^{n+1}).$$

An anderer Stelle soll gezeigt werden, daß eine solche Darstellung des Fehlers auch im Falle elliptischer Randwertprobleme in mehr als einer Dimension gilt.

Das wesentliche Hilfsmittel sind gewisse Approximations-Eigenschaften der benützten finiten Elemente, d. h. der Teilräume S_h. Sie wurden erstmals in Nitsche [23], Nitsche-Schatz [24, 25] eingeführt und bei der Untersuchung der lokalen Konvergenz von Projektions-Methoden herangezogen. Hervorgehoben sei die folgende Annahme:

Sei ω eine fest gewählte C^∞-Funktion. Zu jedem $\varphi \in S_h$ existiert ein $\chi \in S_h$, welches die Funktion $\omega\,\varphi$ gemäß

$$\|\omega\,\varphi - \chi\| \leq c\, h\, \|\varphi\|$$

approximiert.

Diese Eigenschaft von Splines findet sich implizite bei Kammerer-Redelin [17] und Schultz [29]. Es sei auch auf die neueren Arbeiten Descloux [10], Dupont-Wahlbin [11], Douglas-Dupont-Wahlbin [12], Douglas-Dupont-Wheeler [13] und Rachford-Wheeler [27] hingewiesen.

1. Das Sturm-Liouville-Problem

Mit $H_k(I')$ werde der Sobolev-Raum der Funktionen mit quadratisch-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung k und mit

$$\|u\|_{k \cdot I'} = \left\{ \sum_{\varkappa \leq k} \int_{I'} |u^{(\varkappa)}|^2\, dx \right\}^{1/2} \tag{1}$$

die Norm in $H_k(I')$ bezeichnet. Im Falle $I' = I := (0, 1)$ schreiben wir auch $\|\cdot\|_k$. Die Bedeutung von C^k, C_K^∞, $\mathring{H}_k$ usw. ist wie üblich.

Wir betrachten das Randwert-Problem

$$\begin{aligned} Ly = -(p\,y')' + q\,y = f \quad \text{in} \quad I, \\ y(0) = y(1) = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

bei den folgenden Voraussetzungen:

(i) $p, q \in C^\infty(I)$,

(ii) $p > 0$, $q \geqq 0$ in $(0, 1]$,

(iii) $x^{-\alpha} p(x)$, $x^{2-\alpha} q(x)$ sind analytisch bei $x = 0$ mit $\alpha > 0$ und

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} x^{-\alpha} p(x) = 1, \\ &\lim_{x \to 0} x^{2-\alpha} q(x) = \gamma > 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Der Differential-Operator L ist bei $x = 0$ vom Fuchsschen Typ.

$$r_{1,2} = (1-\alpha)/2 \pm \sqrt{\gamma + (1-\alpha)^2/4} \tag{4}$$

sind die Nullstellen der charakteristischen Gleichung, und es gibt zwei linear unabhängige Lösungen von $Ly = 0$ mit dem Verhalten $y_i \approx x^{r_i}$ bei $x = 0$. Wegen $\gamma > 0$ gilt $r_2 < 0 < r_1$, d.h. abgesehen von einem Faktor gibt es genau eine bei $x = 0$ verschwindende Lösung der homogenen Differentialgleichung. Im folgenden sollen y_1, y_2 zwei Funktionen sein gemäß

$$\begin{aligned} &L y_1 = L y_2 = 0 \quad \text{in} \quad I, \\ &y_1(0) = y_2(1) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei die Normierung entsprechend

$$p(x) \{y_1' y_2 - y_1 y_2'\}(x) = 1 \tag{6}$$

gewählt ist. Nahe $x = 0$ gilt

$$y_i = c_i x^{r_i} \left(1 + O\left(x \log \frac{1}{x}\right)\right) \tag{7}$$

mit geeigneten Konstanten c_1, c_2.

Unter Heranziehung der Funktionen y_i läßt sich die Lösung des Problems (2) durch

$$y = L^{-1} f = y_1(x) \int_x^1 y_2(t) f\, dt + y_2(x) \int_0^x y_1(t) f\, dt \tag{8}$$

darstellen. Die Ableitung läßt sich durch

$$|y'(x)|^2 \leqq 2\, |y_1'(x)|^2 \int_x^1 y_2^2 ds \int_x^1 f^2 dt + 2\, |y_2'(x)|^2 \int_0^x y_1^2 ds \int_0^x f^2 dt \tag{9}$$

abschätzen. Durch Vertauschen der Integrationsreihenfolgen erhalten wir

$$\int_I y'^2 dx \leqq 2 \int_I f^2 dt \left\{ \int_0^t y_1'^2(x) \int_x^1 y_2^2(s)\, ds\, dx + \int_t^1 y_2'^2(x) \int_0^x y_1^2(s)\, ds\, dx \right\}. \tag{10}$$

Wegen (7) und (4) ist der Faktor von f^2 bei $x = 0$ und damit in I beschränkt, falls die Bedingung

$$\alpha < \operatorname{Min}(1, 2\gamma + 1/2) \tag{11}$$

erfüllt ist. In diesem Falle besitzt L^{-1} als Abbildung von $H_0 = L_2(I)$ in H_1 bzw. $\mathring{H}_1$ eine beschränkte Norm. Im allgemeinen ist $L^{-1}: H_0 \to H_2$ unbeschränkt, vgl. dazu Lemma 4 unten.

Da $x=0$ die einzige singuläre Stelle ist, ergibt sich unmittelbar

Lemma 1. Sei $I_1 \subseteq I$ ein Intervall mit

$$d = \operatorname{dist}(0, I_1) > 0. \tag{12}$$

Aus $f \in H_k(I_1) \cap H_0(I)$ folgt $y = L^{-1} f \in H_{k+2}(I_1)$ mit

$$\|y\|_{k+2 \cdot I_1} \leqq c\,\{\|f\|_{k \cdot I_1} + \|f\|_0\}. \tag{13}$$

Die Konstante c hängt nur von p, q und von d ab.

Im folgenden benützten wir die Bezeichnung ($u \in H_0 = L_2(I)$)

$$\operatorname{supp}'(u) = \bigcup_{x \in \operatorname{supp}(u)} [x, 1], \tag{14}$$

d.h. $\operatorname{supp}'(u)$ ist das kleinste abgeschlossene Intervall $[\bar{x}, 1]$, so daß $u(x)=0$ fast überall in $(0, \bar{x})$ gilt.

Nun sei angenommen

$$d(f) := \operatorname{dist}(0, \operatorname{supp}'(f)) > 0. \tag{15}$$

Nach (8) ist dann für $x \notin \operatorname{supp}'(f)$

$$y(x) = \left\{\int_I y_2 f\, dt\right\} y_1(x). \tag{16}$$

Gilt nun darüber hinaus die Beziehung

$$\int_I y_2(t) f\, dt = 0, \tag{17}$$

so verschwindet $y(x)$ für solche Argumente. Das liefert

Lemma 2. Unter der Voraussetzung der Beziehung (17) gilt

$$\operatorname{supp}'(y) \subseteq \operatorname{supp}'(f). \tag{18}$$

Die Kombination der vorausgehenden Lemmata führt zu

Lemma 3. Erfüllt die Funktion $f \in H_k(I)$ die Beziehungen (15) und (17), so liegt die Lösung $y = L^{-1} f$ in $\mathring{H}_1(I) \cap H_{k+2}(I)$ und es gilt

$$\|y\|_{k+2} \leqq c\, \|f\|_k \tag{19}$$

mit einer nur von p, q und $d(f)$ abhängigen Konstanten c.

Die Regularität von y bei $x=0$ soll nicht in Einzelheiten diskutiert werden. Wir erwähnen nur

Lemma 4. Es bestehe die Beziehung (15) jedoch nicht (17). Dann liegt $y = L^{-1} f$ in H_r für $r < r_1 + 1/2$. Bei $r > r_1 + 1/2$ gilt $y \notin H_r$.

Die Parameter α, γ lassen sich gemäß (11) und $4\gamma < 3 + 6\alpha$ wählen. Dann ist $r_1 + 1/2 < 2$. L^{-1} ist dann als Abbildung von H_0 in H_2 nicht beschränkt.

2. Ritz-Approximation, Spline-Räume

In Verbindung mit dem Ritzschen Verfahren für das Randwertproblem (2) spielt die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_I (p\, u' v' + q\, u\, v)\, dx \tag{20}$$

die zentrale Rolle. Da $a(.,.)$ positiv und symmetrisch in C_K^∞ ist, wird durch

$$\|u\|' = a(u, u)^{1/2} \tag{21}$$

eine Norm definiert. Wir bezeichnen mit H' die Abschließung von C_K^∞ bezüglich dieser Norm. Dann gilt

Lemma 5. $\mathring{H}_1$ ist stetig in H' eingebettet.

Zum Beweis haben wir die Existenz einer Konstanten c zu zeigen, mit der gilt

$$\|u\|' \leqq c\,\|u\|_1 \quad \text{für} \quad u \in \mathring{H}_1. \tag{22}$$

Das Glied $\{\int p\, u'^2\}^{1/2}$ läßt sich durch $\|u\|_1$ abschätzen, da p beschränkt ist. Bei $u \in \mathring{H}_1$, ist

$$|u(x)|^2 = \left|\int_0^x u'\,dt\right|^2 \leqq x \int_0^x u'^2\,dt \tag{23}$$

und daher

$$\int_I q u^2\,dx \leqq \int_I u'^2\,dt \int_t^1 x q(x)\,dx. \tag{24}$$

Wegen der Voraussetzung (iii) von §1 ist der Faktor von u'^2 in der letzten Ungleichung rechts beschränkt, so daß sich auch das zweite Glied in der '-Norm durch die 1-Norm abschätzen läßt.

Für spätere Zwecke stellen wir noch eine Beziehung bereit, deren Beweis offensichtlich ist.

Lemma 6. Es sei $I' \subset I$ mit

$$d = \operatorname{dist}(0, I') > 0. \tag{25}$$

Dann existiert eine nur von p, q und d abhängige Konstante c derart, daß für alle $u \in H'$ gilt

$$\|u\|_{1, I'} \leqq c\,\|u\|' \quad \text{für} \quad u \in H'. \tag{26}$$

Jetzt sei S_h ein endlich-dimensionaler Unterraum von $\mathring{H}_1$ oder zumindest von H'. Die Ritz-Näherung $y_h = R_h\, y \in S_h$ der Lösung y von (2) ist die beste Approximation von y durch Elemente von S_h in bezug auf die Norm in H':

$$\|y - y_h\|' = \inf_{\chi \in S_h} \|y - \chi\|'. \tag{27}$$

y_h ist auch durch

$$a(y_h, \chi) = (f, \chi) \quad \text{für} \quad \chi \in S_h \tag{28}$$

charakterisiert, d.h. läßt sich aus p, q und f allein berechnen. Wegen $(f, \chi) = a(y, \chi)$ können wir auch die Beziehung

$$a(y - y_h, \chi) = 0 \quad \text{für} \quad \chi \in S_h \tag{29}$$

als Definition von $y_h \in S_h$ verwenden.

Die sich ergebenden Fehlerabschätzungen hängen wesentlich von den Approximations-Eigenschaften der benützten Teilräume ab. Wir wollen hier die folgende Annahme machen:

Für jedes $h \in (0, 1)$ seien

(i) eine endliche Menge $\mathfrak{J}_h$ von offenen, in I enthaltenen Mengen,

(ii) ein endlich-dimensionaler Teilraum $S_h \subseteq \mathring{H}_1 \cap H_n$

gegeben, die die noch folgenden vier Bedingungen erfüllen. Dabei bedeute n eine natürliche Zahl und c_1, c_2, c_3, c_3', c_4 numerische Konstanten.

Eigenschaft 1. Zu jedem $I' \subset I$ existiert ein $J \in \mathfrak{J}_h$ mit $\operatorname{dist}(I', J) \leqq c_1 h$.

Eigenschaft 2. Für jedes $J \in \mathfrak{J}_h$ und $\chi \in S_h$ bestehen inverse Abschätzungen der Gestalt

$$\|\chi\|_{k+1 \cdot J} \leqq c_2 h^{-1} \|\chi\|_{k \cdot J} \quad (k=0, 1, \ldots, n-1).$$

Eigenschaft 3. Jedes $u \in \mathring{H}_1 \cap H_m$ mit $m \leqq n+1$ läßt sich durch ein $\chi \in S_h$ mit

$$\operatorname{dist}(\operatorname{supp}(u), \operatorname{supp}(\chi)) \leqq c_3 h$$

gemäß

$$\|u-\chi\|_k \leqq c_3' h^{m-k} \|u\|_m \qquad (0 \leqq k < m)$$

approximieren.

Eigenschaft 4. Es sei ω eine feste C^∞-Funktion mit $I_1 = \operatorname{supp}(\omega)$, und I_2 enthalte I_1 echt. Die Funktion $\omega\chi$ mit $\chi \in S_h$ läßt sich durch eine Funktion $\varphi \in S_h$ mit $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq I_2$ gemäß

$$\|\omega\chi - \varphi\|_k \leqq c_4 h^{n+1-k} \|\chi\|_{n \cdot I_2}$$

approximieren.

3. Fehleranalyse

Erste Fehlerschranken ergeben sich mit Hilfe der Lemma 5 und 6:

Satz 1. Die Lösung y des Randwertproblems (2) liege in $\mathring{H}_1 \cap H_m$ mit $m \leqq n+1$, und y_h sei die zugehörige Ritz-Approximation. Dann gilt

$$\|y-y_h\|' \leqq c\, h^{m-1} \|y\|_m, \tag{30}$$

und in jedem Intervall I_1 mit $d = \operatorname{dist}(0, I_1) > 0$

$$\|y-y_h\|_{1 \cdot I_1} \leqq c\, h^{m-1} \|y\|_m. \tag{31}$$

Im Hinblick auf Lemma 4 kann der Index m selbst für glatte Funktionen f klein sein, d. h. die Aussage des Satzes scheint schwach zu sein. Wie aber schon in der Einleitung hervorgehoben, beeinflußt die Singularität bei $x=0$ die Konvergenzgeschwindigkeit global und ebenso lokal.

Um das Verhalten des Fehlers $e = y - y_h$ in einem Intervall $I_1 \subset\subset I$ zu untersuchen, werden wir eine Abschneide-Funktion ω, d. h. $\omega \in C_K^\infty(I)$, heranziehen und dann $\tilde{e} = \omega e$ in ganz I betrachten. Mit einem zweiten Intervall I_2 entsprechend $I_1 \subset\subset I_2 \subset I$ läßt sich ω gemäß $0 \leqq \omega(x) \leqq 1$ in I und

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad x \in I_1 \\ 0 & \text{für} \quad x \in I - I_2 \end{cases} \tag{32}$$

wählen; wir sprechen dann von einer Abschneide-Funktion in bezug auf I_1, I_2. Da wir ein Störglied proportional zu y_2 — siehe (5) — erwarten, betrachten wir neben $e, \tilde{e}$ parallel

$$E_\mu = e - \mu y_2, \qquad \tilde{E}_\mu = \omega E_\mu \qquad (\mu \in R). \tag{33}$$

Die Zahl $\varkappa = \varkappa(e) \in R$ sei so definiert, daß $\|\omega E_\mu\|$ minimal wird:

$$\|\tilde{E}_\varkappa\| = \inf_\mu \|\tilde{E}_\mu\|. \tag{34}$$

Es ergibt sich

$$\varkappa = \{\int \omega^2 y_2 e\}/\{\int \omega^2 y_2^2\}. \tag{35}$$

Nach Definition berechnet sich $\varkappa$ mit Hilfe einer Abschneide-Funktion ω, von der $\varkappa$ jedoch „nahezu" unabhängig ist:

Lemma 7. Es seien ω_i $(i=1, 2)$ zwei Abschneide-Funktionen in bezug auf $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$ und $\varkappa_i$ die entsprechenden Größen (35). Dann gilt

$$|\varkappa_1 - \varkappa_2| \leqq c\, h^n \|e\|' \tag{36}$$

mit einer Konstanten c, die nur von p, q und $I_1^{(i)}$, $I_2^{(i)}$ abhängt.

Mit $c_i = \int \omega_i^2 y_2^2$ gilt $\varkappa_i = c_i^{-1} \int \omega_i^2 y_2 e$ und daher

$$c_1 c_2 (\varkappa_1 - \varkappa_2) = \int e\,(c_2 \omega_1^2 - c_1 \omega_2^2)\, y_2. \tag{37}$$

Die Funktion $F = (c_2 \omega_1^2 - c_1 \omega_2^2)\, y_2$ erfüllt die Bedingungen (15) und (17). Daher ist nach Lemma 3 die durch

$$\begin{aligned} L w &= F \qquad \text{in } I, \\ w(0) &= w(1) = 0 \end{aligned} \tag{38}$$

definierte Funktion w beliebig oft differenzierbar. Nun können wir umformen

$$\begin{aligned} c_1 c_2 (\varkappa_1 - \varkappa_2) &= \int e\, L w = a(e, w) \\ &= a(e, w - \chi), \end{aligned} \tag{39}$$

wobei $\chi \in S_h$ wegen (29) beliebig gewählt werden kann. Danach können wir abschätzen

$$|\varkappa_1 - \varkappa_2 \leqq c_1^{-1} c_2^{-1} \|e\|' \inf_{\chi \in S_h} \|w - \chi\|'. \tag{40}$$

Da c_1, c_2 nach unten beschränkt sind, erhalten wir nach Heranziehung von (22) mit Hilfe der Approximations-Eigenschaft 3 die behauptete Abschätzung (36).

Unser Ziel ist die Abschätzung von E in einem Intervall $I_1 \subset\subset I$. Der wesentliche Schritt ist eine Rekursionsbeziehung:

Lemma 8. Es seien I_1, I_2 zwei Intervalle gemäß $I_1 \subset\subset I_2 \subseteq I$. Weiter sei $y \in H_m(I_2)$ mit $m \leqq n+1$ vorausgesetzt. Der durch (33), (34) definierte ‚korrigierte' Fehler E erfüllt die Ungleichung

$$\|E\|_{1 \cdot I_1} \leqq c\, h\, \|E\|_{1 \cdot I_2} + c\, h^{m-1} \{\|y\|_{m \cdot I_2} + \|e\|'\}. \tag{41}$$

Die Konstante c hängt nur von I_1, I_2 und den Daten, d.h. p, q ab.

Wegen Lemma 7 haben wir eine gewisse Freiheit in der Wahl von ω. Wir wählen zwei weitere Intervalle I', I'' gemäß $I_1 \subset\subset I' \subset\subset I'' \subset\subset I_2$ und verwenden eine Abschneide-Funktion in bezug auf I_1, I'. Es gilt mit $\tilde{E} = \omega\, E$

$$\|E\|_{1 \cdot I_1} \leqq \|\tilde{E}\|_{1 \cdot I'} \leqq c\, \|\tilde{E}\|'. \tag{42}$$

Nun benützen wir unter Verwenden des Ritz-Operators R_h die Aufspaltung

$$\begin{aligned}\widetilde{E} = \omega E &= (I - R_h)\,\widetilde{E} + R_h \widetilde{E} \\ &= (I - R_h)\,\{\omega(y - \varkappa y_2)\} - (I - R_h)\,\{\omega y_h\} + R_h \widetilde{E}.\end{aligned} \tag{43}$$

und schätzen die 3 Terme rechts getrennt ab. Zunächst gilt

$$|\varkappa| \leqq c\,\|e\|_{0\cdot I'} \leqq c\,\|e\|' \tag{44}$$

und daher mit $y \in H_m(I_2)$ wegen $y_2 \in C^\infty(I)$, d.h. $\omega(y - \varkappa y_2) \in H_m(I)$

$$\|\omega(y - \varkappa y_2)\|_m \leqq c(\|y\|_{m\cdot I_2} + \|e\|'). \tag{45}$$

Der Satz 1 liefert

$$\|(I - R_h)\,\{\omega(y - \varkappa y_2)\}\|' \leqq c\,h^{m-1}(\|y\|_{m\cdot I_2} + \|e\|'). \tag{46}$$

Um für das 2. Glied in (43) eine Schranke zu finden, ziehen wir Eigenschaft 4 heran. Für hinreichend kleine h läßt sich ein $\chi \in S_h$ mit supp $(\chi) \subseteq I''$ so finden, daß gilt

$$\|\omega y_h - \chi\|_1 \leqq c\,h^n\,\|y_h\|_{n\cdot I''}. \tag{47}$$

Daher finden wir

$$\begin{aligned}\|(I - R_h)\,\{\omega y_h\}\|' &= \inf_{\varphi \in S_h} \|\omega y_h - \varphi\|' \\ &\leqq c \inf_{\varphi \in S_h} \|\omega y_h - \varphi\|_1 \\ &\leqq c\,h^n\,\|y_h\|_{n\cdot I''}.\end{aligned} \tag{48}$$

Nun sei das Gebiet $J \in \mathfrak{J}_h$ gemäß $I'' \subseteq J \subset\subset I_2$ gewählt, was für kleine h möglich ist. Außerdem sei $Y_h \in S_h$ eine geeignete Approximation an $y - \varkappa y_2$. Unter Berücksichtigung der inversen Abschätzungen erhalten wir

$$\begin{aligned}h^n\,\|y_h\|_{n\cdot I''} &\leqq h^n\,\|y_h\|_{n\cdot J} \\ &\leqq c\,h^{m-1}\,\|y_h\|_{m-1\cdot J} \\ &\leqq c\,h^{m-1}\,\{\|Y_h\|_{m-1\cdot J} + \|y_h - Y_h\|_{m-1\cdot J}\}.\end{aligned} \tag{49}$$

Das erste Glied rechts läßt sich gemäß

$$\begin{aligned}\|Y_h\|_{m-1\cdot J} &\leqq \|y - \varkappa y_2\|_{m-1\cdot J} + \|Y_h - y + \varkappa y_2\|_{m-1\cdot J} \\ &\leqq (1 + c\,h)\,\|y - \varkappa y_2\|_{m\cdot J} \\ &\leqq c(\|y\|_{m\cdot I_2} + \|e\|')\end{aligned} \tag{50}$$

abschätzen. Da $y_h - Y_h$ in S_h liegt, läßt sich für das zweite Glied weiter die Ungleichungs-Folge gewinnen

$$\begin{aligned}h^{m-1}\,\|y_h - Y_h\|_{m-1\cdot J} &\leqq c\,h\,\|y_h - Y_h\|_{1\cdot J} \\ &\leqq c\,h\,\{\|y - \varkappa y_2 - y_h\|_{1\cdot J} + \|y - \varkappa y_2 - Y_h\|_{1\cdot J}\} \\ &\leqq c\,h\,\|E\|_{1\cdot I_2} + c\,h^m(\|y\|_{m\cdot I_2} + \|e\|').\end{aligned} \tag{51}$$

Schließlich ist das letzte Glied $R_h \widetilde{E}$ in (43) zu betrachten. Wegen $R_h \widetilde{E} \in S_h$ gilt

$$\|R_h \widetilde{E}\|' = \sup\{a(R_h \widetilde{E}, \chi)\,|\,\chi \in S_h \wedge \|\chi\|' = 1\}. \tag{52}$$

Mit der den Ritz Operator R_h definierenden Beziehung (29) erhalten wir

$$a(R_h \widetilde{E}, \chi) = a(\widetilde{E}, \chi). \tag{53}$$

Der Faktor ω in $\widetilde{E} = \omega E$ läßt sich auf χ hinüberwälzen gemäß

$$\begin{aligned} a(\widetilde{E}, \chi) &= a(\omega E, \chi) \\ &= a(E, \omega \chi) + \int E \{p \omega' \chi' + (p \omega' \chi)'\}. \end{aligned} \tag{54}$$

Zunächst betrachten wir das erste Glied rechts. Zu $\omega \chi$ gibt es ein approximierendes Element φ mit supp $(\varphi) \subseteq I''$ und — siehe (49) —

$$\|\omega \chi - \varphi\|_1 \leq c\, h \|\chi\|_{1 \cdot I''} \leq c\, h \|\chi\|'. \tag{55}$$

Wegen (29) können wir schreiben

$$a(E, \omega \chi) = a(E, \omega \chi - \varphi) - \varkappa\, a(y_2, \varphi). \tag{56}$$

Wesentlich ist nun, daß der letzte Summand verschwindet, denn es gilt

Lemma 9. Für jedes $u \in \mathring{H}_1$ mit $0 \notin I_u = \operatorname{supp}(u)$ und der durch (5) definierten Funktion y_2 gilt

$$a(u, y_2) = 0. \tag{57}$$

Der Beweis ist wegen $a(u, y_2) = p\, u\, y_2'|_{\partial I_u} + \int u\, L y_2$ offensichtlich. Unter Ausnutzung der Eigenschaften von φ gelangen wir von (56) zu

$$\begin{aligned} |a(E, \omega \chi)| &\leq c \|E\|_{1 \cdot I''} \|\omega \chi - \varphi\|_{1 \cdot I''} \\ &\leq c\, h \|\chi\|' \|E\|_{1 \cdot I_1}. \end{aligned} \tag{58}$$

Nunmehr wenden wir uns dem zweiten Summanden in (54) zu. Nach Konstruktion — vgl. (33), (35) — gilt

$$\int E\, \omega^2 y_2 = 0. \tag{59}$$

Daher können wir für diesen Summanden mit $g := p \omega' \chi' + (p \omega' \chi)'$ und einem beliebigen $\nu \in R$ schreiben

$$\int E\, g = \int E\, (g - \nu\, \omega^2 y_2). \tag{60}$$

Den Parameter ν wählen wir gemäß

$$\int (g - \nu\, \omega^2 y_2)\, y_2 = 0. \tag{61}$$

Dann erfüllt $G := g - \nu\, \omega^2 y_2$ die Bedingungen (15) und (17). Indem wir wieder eine durch

$$\begin{aligned} L w &= G \quad \text{in} \quad I \\ w(0) &= w(1) = 0 \end{aligned} \tag{62}$$

definierte Hilfsfunktion w heranziehen, können wir schreiben

$$\int E\, g = \int E G = a(E, w). \tag{63}$$

Wegen $0 \notin \operatorname{supp}(w)$ — vgl. Lemma 2 — ist die partielle Integration korrekt. Ähnlich zu oben — vgl. (56) — (58) — gilt mit beliebigem $\varphi \in S_h$ bei $0 \notin \operatorname{supp}(\varphi)$

$$\int E\, g = a(E, w - \varphi). \tag{64}$$

Nach Lemma 1 bis 3 und der Struktur von G wissen wir einerseits $w \in H_2$ und $\|w\|_2 \leqq c\,\|G\|$. Da $|\nu|$ durch $c\,\|g\|$ und $\|g\|$ seinerseits durch $c\,\|\chi\|_{1\cdot I'} \leqq c\,\|\chi\|'$ abgeschätzt werden kann, gilt also

$$\|w\|_2 \leqq c\,\|\chi\|'. \tag{65}$$

Andererseits verschwindet $w(x)$ für $x \notin \mathrm{supp}'(G) \subseteq \mathrm{supp}'(\omega)$, d.h. in $\hat{I} = I - \mathrm{supp}'(\omega)$. Rechts von $\mathrm{supp}(\omega)$, d.h. in $\tilde{I} = \mathrm{supp}'(\omega) - \mathrm{supp}(\omega)$, verschwindet G und w ist beliebig oft differenzierbar, insbesondere gilt mit geeigneten Konstanten

$$\|w\|_{m\cdot \tilde{I}} \leqq c\,\|G\| \leqq c\,\|\chi\|'.$$

Wegen $\mathrm{supp}(\omega) \subseteq I'$ gilt daher zusammengefaßt

$$\|w\|_{m\cdot I-I'} \leqq c\,\|\chi\|'. \tag{66}$$

Nun sei $\varrho, \sigma \in C^\infty$ eine Zerlegung der Eins in bezug auf I'', $I-I'$, d.h. es gelte

$$\begin{gathered} \varrho + \sigma = 1 \quad \text{in} \quad I, \\ \mathrm{supp}(\varrho) \subseteq I'', \qquad \mathrm{supp}(\sigma) \subseteq I - I'. \end{gathered} \tag{67}$$

Wir kürzen ab $w_\varrho = \varrho\, w$, $w_\sigma = \sigma\, w$. Dann sind die Träger von w_ϱ bzw. w_σ in I'' bzw. $I-I'$ enthalten. Aus (65), (66) folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} \|w_\varrho\|_2 &\leqq c\,\|\chi\|' \\ \|w_\sigma\|_m &\leqq c\,\|\chi\|'. \end{aligned} \tag{68}$$

Diese zwei Funktionen lassen sich durch $\varphi_\varrho, \varphi_\sigma \in S_h$ gemäß

$$\begin{aligned} \|w_\varrho - \varphi_\varrho\|_1 &\leqq c\,h\,\|\chi\|', \\ \|w_\sigma - \varphi_\sigma\|_1 &\leqq c\,h^{m-1}\,\|\chi\|' \end{aligned} \tag{69}$$

approximieren. Bei hinreichend kleinem h läßt sich darüber hinaus $\mathrm{supp}(\varphi_\varrho) \subseteq I_2$ und $\mathrm{supp}(\varphi_\sigma) \subset \hat{I}'$ mit $\hat{I}' \subseteq I - I_1$ und $0 \notin \hat{I}'$ erreichen. Bei der Wahl von $\hat{I}'$ ist nur zu beachten, daß $\mathrm{supp}(w_\sigma) \subseteq \mathrm{supp}'(\omega) \cap \mathrm{supp}(\sigma) \subseteq \mathrm{supp}'(\omega) \cap (I-I')$ und $0 \notin \mathrm{supp}'(\omega)$ gilt. Wird $\varphi = \varphi_\varrho + \varphi_\sigma$ in (64) eingesetzt, so können wir abschätzen

$$\begin{aligned} \left|\int E\,g\right| &\leqq c\,\|E\|_{1\cdot I_2}\,\|w_\varrho - \varphi_\varrho\|_1 + c\,\|E\|_{1\cdot \hat{I}'}\,\|w_\sigma - \varphi_\sigma\|_1 \\ &\leqq c\,h\,\|E\|_{1\cdot I_2}\,\|\chi\|' + c\,h^{m-1}\,\|E\|_{1\cdot \hat{I}'}\,\|\chi\|'. \end{aligned} \tag{70}$$

Mit (44) erhalten wir

$$\|E\|_{1\cdot \hat{I}'} \leqq \|e\|_{1\cdot \hat{I}'} + |\varkappa|\,\|y_2\|_{1\cdot \hat{I}'} \leqq c\,\|e\|' \tag{71}$$

und daher für das zweite Glied in (54)

$$\left|\int E\,\{p\,\omega'\,\chi' + (p\,\omega'\,\chi)'\}\right| \leqq c\,\{h\,\|E\|_{1\cdot I_2} + h^{m-1}\,\|e\|'\}\,\|\chi\|'. \tag{72}$$

Zusammen mit (58) gelangen wir so — vgl. (52)—(54) — zu

$$\|R_h \tilde{E}\|' \leqq c\,h\,\|E\|_{1\cdot I_2} + c\,h^{m-1}\,\|e\|'. \tag{73}$$

Nun müssen wir nur noch die Abschätzungen (46), (48)—(51) und (73) für die Glieder auf der rechten Seite von (43) heranziehen, um die behauptete Beziehung (41) von Lemma 8 zu erhalten.

Aus dem vorangehenden Lemma folgt leicht der

Satz 2. Es seien I_1, I_2 zwei Intervalle mit $I_1 \subset\subset I_2 \subset I$ und es gelte $y \in H_m(I_2)$ mit $m \leqq n+1$. Für die durch (34) definierte Korrektion E des Fehlers $e = y - y_h$ des Ritzschen Verfahrens gilt die Abschätzung

$$\|E\|_{1 \cdot I_1} \leqq c\, h^{m-1} (\|y\|_{m \cdot I_2} + \|e\|'). \tag{74}$$

Zum Beweis setzen wir $I^0 := I_1$, $I^{m-1} := I_2$ und wählen $m-2$ weitere Intervalle I^ν gemäß $I^\nu \subset\subset I^{\nu+1}$ für $\nu = 0, \ldots, m-2$. Wird nun die Abschätzung (41) sukzessiv für die Intervalle I^ν, $I^{\nu+1}$ anstelle von I_1, I_2 angewendet, so ergibt sich unmittelbar (74).

Mit Hilfe eines Dualitätsargumentes können wir eine verbesserte Fehlerabschätzung von E in der Norm von $H = L_2(I)$ herleiten:

Satz 3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 gilt

$$\|E\|_{0 \cdot I_1} \leqq c\, h^m (\|y\|_{m \cdot I_2} + \|e\|'). \tag{75}$$

Zum Beweis verwenden wir zwei weitere Intervalle I', I'' und eine Abschneide-Funktion ω wie beim Beweis von Lemma 8. Dann gilt zunächst

$$\begin{aligned} \|E\|^2_{0 \cdot I_1} &\leqq \|\omega E\|^2_0 \\ &= (E, \omega^2 E). \end{aligned} \tag{76}$$

Wegen der Konstruktion von E erfüllt die Funktion $F = \omega^2 E$ die Bedingungen (15) und (17). w sei nun durch

$$\begin{aligned} L w = F &:= \omega^2 E \quad \text{in} \quad I, \\ w(0) = w(1) &= 0 \end{aligned} \tag{77}$$

definiert. Ähnlich zu oben ist $w = 0$ in $I = I - \operatorname{supp}'(\omega)$ und $w \in C^\infty$ in $\tilde{I} = \operatorname{supp}'(\omega) - \operatorname{supp}(\omega)$ und daher $w \in H_2 \cap C^\infty(I - I'')$ mit

$$\begin{aligned} \|w\|_2 &\leqq c\, \|F\|, \\ \|w\|_{m+1 \cdot I - I''} &\leqq c\, \|F\|. \end{aligned} \tag{78}$$

Nun werde $\hat{I}'$ so gewählt, daß $\operatorname{supp}'(\omega) \subset\subset \hat{I}'$ und $0 \notin \hat{I}'$ erfüllt wird. Mit Hilfe einer Zerlegung analog wie bei (67), (68) läßt sich die Existenz eines Elementes $\chi \in S_h$ mit $\operatorname{supp}(\chi) \subseteq \hat{I}'$ zeigen, welches die Funktion w gemäß

$$\begin{aligned} \|w - \chi\|_{1 \cdot I_2} &\leqq c\, h\, \|F\|, \\ \|w - \chi\|_{1 \cdot \hat{I}'} &\leqq c\, h^m\, \|F\| \end{aligned} \tag{79}$$

approximiert. Vermöge Lemma 9 erhalten wir mit diesem χ

$$\begin{aligned} \|\omega E\|^2 &= (E, L w) \\ &= a(E, w) = a(E, w - \chi) \\ &\leqq c\, \{h\, \|E\|_{1 \cdot I_2} + h^m\, \|E\|_{1 \cdot \hat{I}'}\}\, \|F\|. \end{aligned} \tag{80}$$

Wegen $\|F\| = \|\omega^2 E\| \leqq \|\omega E\|$ folgt daraus

$$\|\omega E\| \leqq c\,h\,\|E\|_{1\cdot I_2} + c\,h^m\,\|E\|_{1\cdot \hat{I}'}. \tag{81}$$

Nun ziehen wir die Ungleichungen (44), (76) und Lemma 6 heran, was uns zu

$$\|E\|_{0\cdot I_1} \leqq c\,h\,\|E\|_{1\cdot I_2} + c\,h^m\,\|e\|' \tag{82}$$

führt. Die Ungleichung (75) von Satz 3 folgt aus (82) und (74), wenn noch eine ‚Iteration' in bezug auf die Intervalle dazwischen geschaltet wird.

4. Numerische Beispiele

In den nachfolgend beschriebenen Beispielen haben wir

$$p(x) = x^\alpha, \qquad q(x) = \gamma\, x^{\alpha-2}$$

verwendet. Die Approximationsräume sind lineare Splines, d.h. Polygonzüge, in bezug auf ein äquidistantes Gitter. N gibt die Anzahl der Teilintervalle an und $h = 1/N$ ist die Gitterbreite. Die rechte Seite f der Differentialgleichung wurde so gewählt, daß sich

$$y = x^r - x \qquad (r > 0)$$

als Lösung des Randwertproblems ergibt. Bei allen Berechnungen wurde eine Abschneidefunktion ω benützt, welche für $x \leqq 0{,}3$ verschwindet und für $x \geqq 0{,}5$ den Wert 1 hat. Die Spalten ϱ_e, ϱ_E in den folgenden Tabellen geben „geschätzte" Konvergenzgeschwindigkeiten wieder: Wir erwarten ein asymptotisches Verhalten wie

$$\|\omega e\| = \|\omega e_h\| = \|\omega e_N\| \approx c\,h^\varrho = c\,N^{-\varrho}.$$

Indem wir zwei verschiedene N, z.B. $N_1 = N$ und $N_2 = 2N$ heranziehen, können wir ϱ gemäß

$$\varrho = \varrho_e = (\ln \|\omega e_N\| - \ln \|\omega e_{2N}\|)/\ln 2$$

schätzen.

Die Rechnungen wurden auf der UNIVAC 1110 der University of Wisconsin, Madison, und auf der UNIVAC 1106/II der Universität Freiburg durchgeführt, wobei ein Algol- bzw. Simula-Programm mit einfacher Genauigkeit benutzt wurde. Dabei ist nur eine Genauigkeit bis $\approx 10^{-6}$ erreichbar, vgl. z.B. die letzten Werte in Tabelle 3.

Lineare Splines erfüllen die Bedingungen 1 bis 4 von Paragraph 2. In allen drei Beispielen zeigt $\|\omega E_h\|$ eine Konvergenzgeschwindigkeit 2 im Einklang mit Satz 3. Die Konvergenzgeschwindigkeit von $\|\omega e_h\|$ hängt von α, γ und vom Verhalten der Lösung bei $x = 0$ ab, was außerhalb des Trägers von ω liegt. Diese kann 2 oder kleiner als 2 sein. Das Beispiel 3 zeigt noch einen weiteren Effekt. Selbst bei dem Verhalten wie h^2 von $\|\omega e_h\|$ kann diese Fehlergröße beträchtlich über $\|\omega E_h\|$ liegen, d.h. unabhängig von der Konvergenzgeschwindigkeit kann das Glied $\varkappa_h y_2$ in der Fehlerdarstellung

$$e_h = \varkappa_h y_2 + E_h$$

dominieren.

Tabelle 1. $\alpha=0{,}75$, $\gamma=0{,}126$, $r=0{,}2$

N	$\varkappa$	$\|\omega e\|$	ϱ_e	$\|\omega E\|$	ϱ_E
5	1,78&−1	3,63&−2		6,47&−4	
			0,51		2,07
10	1,25&−1	2,54&−2		1,54&−4	
			0,48		2,13
20	8,98&−2	1,83&−2		3,52&−5	
			0,46		2,02
40	6,51&−2	1,32&−2		8,70&−6	
			0,46		1,82
80	4,74&−2	9,64&−3		2,47&−6	

Tabelle 2. $\alpha=0{,}75$, $\gamma=0{,}126$, $r=1{,}8$

N	$\varkappa$	$\|\omega e\|$	ϱ_e	$\|\omega E\|$	ϱ_E
5	−1,93&−2	4,61&−3		2,42&−3	
			2,00		1,92
10	−4,71&−3	1,15&−3		6,40&−4	
			1,95		2,00
20	−1,23&−3	2,98&−4		1,60&−4	
			1,95		1,96
40	−3,18&−4	7,68&−5		4,12&−5	
			1,86		1,85
80	−8,77&−5	2,12&−5		1,14&−5	

Tabelle 3. $\alpha=0{,}5$, $\gamma=5$, $r=0{,}3$

N	$\varkappa$	$\|\omega e\|$	ϱ_e	$\|\omega E\|$	ϱ_E
5	−9,45&−3	1,39&−2		5,08&−4	
			2,36		2,14
10	−1,83&−3	2,70&−3		1,15&−4	
			2,27		1,86
20	−3,80&−4	5,61&−4		3,17&−5	
			2,18		1,87
40	−8,36&−5	1,24&−4		8,68&−6	
			1,85		
80	−2,26&−5	3,43&−5		8,08&−6	

5. Die Frage der Konvergenz-Verbesserung

Die Beispiele legen den Ansatz

$$e_h \approx c\,h^{\lambda} + O(h^{n+1})$$

für das lokale Verhalten des Fehlers nahe. Mit Hilfe dreier Approximationen, z. B. mit $h_1=h$, $h_2=2\,h$ und $h_0=4\,h$, ist eine Schätzung von c und λ möglich. Durch geeignete Linearkombination

$$\hat{y}_h = a\,y_h + b\,y_{2h} + c\,y_{4h}$$

wäre dann

$$y - \hat{y} = O(^{n+1})$$

zu erwarten.

Tabelle 4. $\alpha=0{,}75$, $\gamma=0{,}126$, $r=0{,}2$

N	$\|\omega e\|$	ϱ_e	$\|\omega \hat{e}_{\text{loc}}\|$	$\varrho\, \hat{e}_{\text{loc}}$	$\|\omega \hat{e}_{\text{glob}}\|$	$\varrho\, \hat{e}_{\text{glob}}$
20	1,83&−2		4,05&−3		3,95&−3	
		0,46		1,53		1,62
40	1,32&−2		1,40&−3		1,28&−3	
		0,46		1,51		1,49
80	9,64&−3		4,90&−4		4,57&−4	

An Hand eines speziellen Beispiels wollen wir zeigen, daß ein solcher Extrapolationsprozeß keine Verbesserung zu bringen braucht. Die approximierenden Teilräume seien polynomiale Spline-Räume vom Grade n in bezug auf eine äquidistante Unterteilung mit Null-Randwerten. Für die rechte Seite der Differentialgleichung machen wir den Ansatz

$$f=\begin{cases}\sum\limits_0^n a_\nu (x/h)^\nu & \text{für} \quad 0<x<h,\\ 0 & \text{für} \quad h\leqq x<1\end{cases}$$

und wählen die a_ν — nicht identisch 0 — gemäß

$$\int\limits_0^h x^\mu f\, dx = h^{\mu+1}\sum_0^n \frac{1}{\mu+\nu+1}\, a_\nu = 0 \quad \text{für} \quad \mu=1,\ldots,n.$$

Wir bemerken, daß die a_ν unabhängig von h sind. Es ist mit dem charakteristischen Exponent r_1 — vgl. (4) —

$$\begin{aligned}\int\limits_0^h x^{r_1} f\, dx &= h^{r_1+1}\sum_0^n \frac{1}{r_1+\nu+1}\, a_\nu\\ &:= h^{r_1+1}\beta\end{aligned}$$

mit $\beta \neq 0$ falls $-r_1$ keine natürliche Zahl ist.

Die Wahl der a_ν garantiert

$$(f,\chi)=0 \quad \text{für} \quad \chi\in S_h,$$

und das ist gleichermaßen richtig für die Elemente von S_{2h} und S_{4h}. Damit verschwinden die Ritz-Näherungen y_h, y_{2h}, y_{4h} identisch. Andererseits ist für $x>h$

$$\begin{aligned}y(x) &= y_2(x)\int\limits_0^h f\, y_1(x)\, dx\\ &\approx c_1\beta\, h^{r_1+1}\, y_2(x)\end{aligned}$$

oder indem wir f einführen

$$e(x)\approx c\cdot\beta\, h^{r_1+\frac{1}{2}}\, \|f\|\cdot y_2(x).$$

Wegen (4) gilt

$$r := r_1+\tfrac{1}{2} = 1-\alpha/2+\sqrt{\gamma+(1-\alpha)^2/4}.$$

Selbst bei Bestehen der Beziehung (11) für α, γ kann r beliebig nahe an 1 kommen und zwar unabhängig vom Grad der benützten Splines.

Obwohl nun eine Extrapolation kein besseres Ergebnis gewährleistet, mag sie in praktischen Fällen von Nutzen sein. Dies sei mit Tabelle 4 illustriert, der die gleichen Parameter α, γ, r wie in Tabelle 1 zugrunde liegen. In der oben skizzierten Art haben wir c und λ geschätzt, und zwar lokal wie auch global. Die sich nach der Extrapolation ergebenden Fehler $\hat{e}_{loc}$ und $\hat{e}_{glob}$ zeigen hinsichtlich der Größenordnung und der Konvergenzgeschwindigkeit Verbesserungen.

Literatur

1. Babuška, I.: Finite element method for domains with corners Computing **6**, 264—273 (1971)
2. Babuška, I.: Solution of problems with interfaces and singularities Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math., University of Maryland, Techn. Note BN-789 (1974)
3. Babuška, I., Kellogg, R.B.: Numerical solution of the neutron diffusion equation in the presence of corners and interfaces. Inst. for Fluid Dynamics and Appl. Math., University of Maryland, Techn. Note BN-720 (1971)
4. Babuška, I., Rosenzweig, M.B.: A finite element scheme for domains with corners. Inst. of Fluid Dynamics and Appl. Math., University of Maryland, Techn. Note BN-720 (1971)
5. Bagmut, G.I.: Difference schemes of high order of accuracy for ordinary differential equations with a regular singularity. USSR Comp. Math. math. Phys. **9**, No. 1, 300—308 (1969)
6. Bramble, J.H., Hubbard, B.E.: Effects of boundary regularity on the discretization error in the fixed membrane eigenvalue problem. SIAM J. Numer. Anal. **5**, 835—863 (1968)
7. Ciarlet, P.G., Natterer, F., Varga, R.S.: Numerical methods of high-order accuracy for singular nonlinear boundary value problems. Numer. Math. **15**, 87—99 (1970)
8. Crouzeix, M., Thomas, J.M.: Résolution numérique par des méthodes d'èléments finis de problèmes elliptiques dégénérés. Comptes Rendus de l'Acad. des Scienes, **275**, 1115—1118 (1972)
9. Dailey, J.W., Pierce, J.G.: Error bounds for the Galerkin method applied to singular and nonsingular boundary value problems. Numer. Math. **19**, 266—282 (1972)
10. Descloux, J.: Interior regularity for Galerkin finite element approximations of elliptic partial differential equations. (to appear)
11. Dupont, T., Wahlbin, L.: L^2 optimality of weighted-H^1 projections into piecewise polynomial spaces. (to appear)
12. Douglas, J. Jr., Dupont, T., Wahlbin, L.: Optimal L_∞ error estimates for Galerkin approximations to solutions of two point boundary value problems. (to appear)
13. Douglas, J., Dupont, T., Wheeler, M.F.: An L_∞ estimate and a superconvergence result for a Galerkin method for elliptic equations based on tensor products of piecewise polynomials. (to appear)
14. Fix, G.: Higher-order Rayleigh-Ritz approximations. J. of Math. and Mech. **18**, 645—657 (1969)
15. Forsythe, G.E.: Asymptotic lower bounds for the frequencies of certain polygonal membranes. Pacific J. Math. **4**, 467—480 (1954)
16. Jamet, P.: On the convergence of finite-difference approximations to one-dimensional singular boundary-value problems. Numer. Math. **14**, 355—378 (1969)
17. Kammerer, W.J., Redelin, G.W.: Local convergence of smooth cubic spline interpolates SIAM J. Numer. Anal. **9**, 687—694 (1972)
18. Laasonen, P.: On the truncation error of discrete approximations to the solution of Dirichlet problems in a domain with corners. J. Assoc. Comp. Math. **5**, 32—38 (1958)

19. Laasonen, P.: On the solution of Poisson's difference equation, J. Assoc. Comp. Mach. **5**, 370—382 (1958)
20. Laasonen, P.: On the discretization error of the Dirichlet problem in a plane region with corners. Annale Academiae Scientiarum Fennicae Series A, I. Mathematica **408**, 1—16 (1967)
21. Natterer, F.: Numerische Behandlung singulärer Sturm-Liouville-Probleme Numer. Math. **13**, 434—447 (1969)
22. Natterer, F.: Das Differenzenverfahren für singuläre Rand-Eigenwertaufgaben gewöhnlicher Differentialgleichungen. Num. Math. **23**, 387–409 (1975)
23. Nitsche, J.: Interior error estimates of projection methods. Proceedings Equadiff 3, Czechoslovak conference on differential equations and their applications, pp. 235—239, Brno (1972)
24. Nitsche, J., Schatz, A.: On local approximation properties of L_2-projection on spline-subspaces. Appl. Anal. **2**, 161—168 (1972)
25. Nitsche, J., Schatz, A.: Interior estimates for Ritz-Galerkin methods. Math. of Comp. **28**, 937–958 (1974)
26. Oganesjan, L.A., Ruhovec, L.A.: Variational-difference schemes for second order linear elliptic equations in a two-dimensional region with a piecewise-smooth boundary. Z. Vycisl. Mat. i Mat. Fiz. **8**, 97—114 (1968)
27. Rachford, H.H. Jr., Wheeler, M.F.: An H^{-1} Galerkin procedure for the two-point boundary value problem. (to appear)
28. Reid, J.K., Walsh, J.E.: An elliptic eigenvalue problem for a reentrant region. J. Soc. Indust. Appl. Math. **13**, 837—850 (1965)
29. Schultz, M.H.: Spline analysis. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N. J. (1973)
30. Veidinger, L.: Evaluation of the error in finding eigenvalues by the method of finite differences. U. S. S. R. Comp. Math. and Math. Physics **5**, 28—42 (1965)
31. Veidinger, L.: On the order of convergence of finite-difference approximations to the solution of the Dirichlet problem in a domain with corners. Studia Sci. Math. Hungar. **3**, 337—343 (1968)
32. Veidinger, L.: On the order of convergence of finite-difference approximations to eigenvalues and eigenfunctions. Studia Sci. Math. Hungar. **5**, 75—87 (1970)
33. Volkov, E.A.: Conditions for the convergence of the method of nets for Laplace's equation at the rate h^2. Mat. Zametki **6**, 669—679 (1969)

J.A. Nitsche
Institut für Angewandte Mathematik
der Universität
Hermann-Herder-Str. 10
D-7800 Freiburg
Bundesrepublik Deutschland