## § 23.
## Das Robin-Poincarésche Problem.

*Formulierung des Robin-Poincaréschen Problems.* Ähnlich, wie bei der ersten Randwertaufgabe können wir auch die Aufgabe der Bestimmung eines Potentials mit gegebenen normalen Ableitungen am Rande durch Einführung eines Parameters $\lambda$ verallgemeinern, also nach einem Potentiale fragen, welches regulär ist in einem Gebiet, am Rande aber eine lineare Verknüpfung beiderseitiger normaler Ableitungen gegeben ist. Über die Form der Berandung machen wir genau dieselben Annahmen, wie beim Neumannschen Problem. Er handelt sich hier um Folgendes:

*Man suche ein Potential $V(p)$ der einfachen Schicht, welches in jedem Punkte s der Berandung des Regularitätsgebietes der Gleichung*

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{dV}{dn}(s^-) - \frac{1-\lambda}{2\lambda}\cdot\frac{dV}{dn}(s^+) = f'(s) \tag{24}$$

*entspricht, worin $\frac{dV}{dn}(s^+)$ und $\frac{dV}{dn}(s^-)$ die in der Richtung der positiven inneren Normale genommenen Ableitungen von $V(p)$ am inneren bzw. äußeren Rande des Randpunktes s bedeuten, $f'(s)$ aber eine gegebene Funktion ist.*

Wieder ist die Forderung, daß $V(p)$ ein Potential der einfachen Schicht sein müsse, wesentlich. Damit wird in der Problemstellung eben gleichzeitig verlangt, daß das gesuchte Potential am Rande stetig zu sein hat. Dieses verallgemeinerte Problem hat nicht nur ein theoretisches Interesse, diese Fragestellung kommt vielmehr in der Elektrostatik, der stationären elektrischen Strömung und der magnetischen Induktion vor, wobei der Parameter $\lambda$ einen zwischen $-1$ und $+1$ liegenden Wert hat. Für $\lambda = \pm 1$ bekommt man die beiden Strömungsprobleme $\frac{dV}{dn}(s^-) = f'(s)$, $\frac{dV}{dn}(s^+) = f'(s)$.

Analog, wie Fredholm verfahren ist, um zu einer Lösung des Neumann-Poincaréschen Problems zu kommen, kann man auch hier vorgehen. Die Gleichung (24) läßt sich schreiben

$$\frac{dV}{dn}(s^-) - \frac{dV}{dn}(s^+) + \lambda\left\{\frac{dV}{dn}(s^-) + \frac{dV}{dn}(s^+)\right\} = 2\lambda f'(s).$$

Das Potential $V(p)$ kann man hier in klassischer Form

$$V(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int \log\frac{1}{r_{ps}}\cdot\mu'(s)\,ds$$

annehmen, wobei der Einfachheit wegen für die Dichte $\frac{\lambda}{\pi}\mu'(s)$ gesetzt worden ist. Die Gleichungen (17a) S. 25, denen jedes Potential $V(p)$ mit einer Massendichtigkeit, d. h. differentiierbar verteilter Masse, genügt, geben für $\mu'(s)$ die Integralgleichung

$$\mu'(s) + \lambda\int h(s,\sigma)\,\mu'(\sigma)\,d\sigma = f'(s), \tag{26}$$

wo, wie früher

$$h(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

gesetzt wurde.

Wir sind also wieder in einer ähnlichen Situation, wie beim Neumann-Poincaréschen Problem. Man wird übrigens bemerken, daß die beiden Integralgleichungen (22) und (26), auf die wir geführt wurden, in einem sehr innigen Zusammenhange stehen, da $h(s, \sigma)$ in beiden Fällen dieselbe Funktion ist, nur daß die beiden Punkte $s$ und $\sigma$ ihre Rollen vertauschen.

Dem vorliegenden Problem fehlt der Charakter der Selbständigkeit. Diese Aufgabe ist nämlich reduzierbar auf die vorangehende und zwar dies sowohl beim Newtonschen Potential als beim logarithmischen.

Um das Verfahren zu skizzieren, welches man bei der Zurückführung dieses Problemes auf das vorige einhalten kann, konstruieren wir zunächst ein Potential $U$ der einfachen Schicht, dessen Massenelement durch $\frac{\lambda}{\pi} f'(\sigma) d\sigma$ gegeben ist, also

$$U(p) = \frac{\lambda}{\pi} \int \log \frac{1}{r_{p\sigma}} \cdot f'(\sigma) d\sigma .$$

Für dieses Potential gilt dann nach (17a) S. 25 die Gleichung $\frac{dU}{dn}(s^-) - \frac{dU}{dn}(s^+) = 2\lambda f'(s)$, so daß das Problem in der Form

$$(1+\lambda)\frac{dV}{dn}(s^-) - (1-\lambda)\frac{dV}{dn}(s^+) = \frac{dU}{dn}(s^-) - \frac{dU}{dn}(s^+)$$

oder

$$(1+\lambda)\frac{dV}{dn}(s^-) - \frac{dU}{dn}(s^-) = (1-\lambda)\frac{dV}{dn}(s^+) - \frac{dU}{dn}(s^+)$$

geschrieben werden kann, woraus sofort ersichtlich ist, daß die beiden folgenden Potentiale

$$(1+\lambda) V(p) - U(p) = -\,\omega(p) \text{ im Außengebiete}$$

$$(1-\lambda) V(p) - U(p) = -\,\omega(p) \text{ im Innengebiete}$$

zusammen ein Potential $\omega(p)$ des Außen- und Innengebietes definieren, welches zu beiden Seiten des Randes dieselben normalen Ableitungen hat, also

$$\frac{d\omega}{dn}(s^+) = \frac{d\omega}{dn}(s^-),$$

während die beiderseitigen Randwerte von $\omega(p)$ verschieden ausfallen. Nimmt man für $p$ einen äußeren und einen inneren Randpunkt $s^-$ und $s^+$, so ist

$$V(s^+) = V(s^-) = V(s) \quad \text{und} \quad U(s^+) = U(s^-) = U(s),$$

da ja $U(p)$ und $V(p)$ Potentiale der einfachen Schicht sind. Durch Elimination von $V(s)$ bekommt man

$$(1+\lambda)\omega(s^+) - (1-\lambda)\omega(s^-) = 2\lambda\, U(s).$$

Dies gibt genau das Neumann-Poincarésche Problem, wenn man zeigen kann, daß $\omega(p)$ notwendig als ein Potential der Doppelschicht darstellbar sein muß. Die Eigenschaft des $\omega(p)$, beiderseits gleiche normale Ableitungen zu besitzen, ist die Quelle der Darstellbarkeit durch ein Potential der Doppelschicht. Um dieses einzusehen, hat man sich nur ein Potential $W(p)$ zu konstruieren, dessen Wertesprung am Rande gleich ist dem Wertesprung von $\omega(p)$ am Rande. Die Belegung des Potentials $W(p)$ aus dem Wertesprung ist aber nach dem Satze $A_2$ S. 22 leicht herzustellen. Die Differenz $W(p) - \omega(p)$ hätte also am Rande keinen Sprung, wäre also stetig; ferner sind die normalen Ableitungen auf beiden Seiten gleich, *wofern* solche für $W(p)$ sich ergeben. So ein Potential mit stetigem Durchgang der stetigen Randwerte durch den Rand und stetigen normalen Ableitungen stellt sich aber als konstant heraus, sobald seine Masse $= 0$ ist. Dies ist aber bei jedem $W(p)$ immer der Fall; daß aber auch die Masse von $\omega(p)$ Null ist, liefert die Integration der Gleichung $\frac{d\omega}{dn}(s^+) = \frac{d\omega}{dn}(s^-)$. Es handelt sich also nur noch um die *Existenz* der normalen Ableitungen des $W(p)$ oder, was für uns schon genügt, einer stetigen Strömung. Dies ist nicht schwer zu bestätigen. In unserem Falle genügt es schon zu zeigen, daß die Randwerte $\overline{W}(p)$ S. 25 stetig sind. Diese Tatsache folgert man aber aus der Stetigkeit der Belegung von $W(p)$ nämlich $\nu(s) = \frac{\omega(s^+) - \omega(s^-)}{2\pi}$. Die Randwerte von $\omega(p)$ haben ja gemäß den obigen Definitionsgleichungen des $\omega(p)$ die Stetigkeitseigenschaften der Potentiale der einfachen Schicht mit Massendichtigkeit. Es ist also $\omega(p)$ ein Potential $W(p)$ und die Zurückführbarkeit ist bewiesen.

Unserer bisher genügend betonten Auffassung über die Mangelhaftigkeit von Problemstellungen, worin es sich um normale Ableitungen am Rande handelt, würde es entsprechen, die erweiterte Problemstellung zu geben. Dies ist sehr einfach und wir können uns deshalb nur auf einige Bemerkungen beschränken. Die Gleichung (24) ist durch

$$(1 + \lambda) d\overline{V}(s^-) - (1 - \lambda) d\overline{V}(s^+) = 2\lambda df(s)$$

zu ersetzen, wo $d\overline{V}(s^-)$ der infinitesimale Strombetrag am Außenpunkte $s^-$ auf einem Elemente $ds$ bedeutet, wo $df(s)$ einen gegebenen Wert hat. Dabei ist $df(s) = f'(s)ds$, wenn Differentiierbarkeit vorhanden ist. Wenn man die obige Reduktion des Problemes auf das vorangehende näher durchsieht, erkennt man gleich, daß im allgemeinen Falle eine methodische Änderung nicht nötig ist und keine prinzipiellen Schwierigkeiten auftreten.

Man kann im logarithmischen Falle die Reduktion aber auch direkt an der letzten Gleichung bewerkstelligen, da man $\overline{V}(p)$ als das zu $V(p)$ konjugierte Potential auffassen kann. Man bekommt durch Integration

$$(1 + \lambda)\overline{V}(s^-) - (1 - \lambda)\overline{V}(s^+) = 2\lambda f(s),$$

d. h. ein Neumann-Poincarésches Problem des § 22 mit dem Parameter $-\lambda$.

## § 24.
## Die singulären Werte des Parameters $\lambda$.

Die Lösung der Probleme (20) und (24) ist auf die beiden Integralgleichungen

(27a) $$\nu(s) + \lambda \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = f(s)$$

und

(27b) $$\mu'(s) + \lambda \int h(s\sigma) \mu'(\sigma) d\sigma = f'(s)$$

zurückgeführt worden, worin $f(s)$ und $f'(s)$ zwei gegebene wenigstens stückweise stetige endliche Funktionen sind, $h(\sigma s)$ aber die Bedeutung (23) hat. Zu suchen sind die Funktionen $\nu(s)$ und $\mu'(s)$. Die Potentiale

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int \nu(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y-y_\sigma}{x-x_\sigma}\cdot d\sigma \tag{28a}$$

$$V(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int \log\frac{1}{r_{p\sigma}}\cdot\mu'(\sigma)d\sigma \tag{28b}$$

geben dann die Lösungen der Probleme

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}W(s^+) - \frac{1-\lambda}{2\lambda}W(s^-) = f(s) \tag{29a}$$

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda}\frac{\partial V}{\partial n}(s^-) - \frac{1-\lambda}{2\lambda}\frac{\partial V}{\partial n}(\sigma^+) = f'(s). \tag{29b}$$

Da unter unseren Voraussetzungen über die Berandung des Gebietes die Funktion $h(\sigma s)$ überall endlich bleibt, so ist die Fredholmsche Methode zur Lösung der beiden Integralgleichungen verwendbar. Nach § 14 S. 29 bekommt man die Lösung folgendermaßen. Man bestimme die Lösung $H(\sigma s)$ einer der beiden Integralgleichungen

$$\begin{aligned} H(\sigma s) + \lambda\int h(\sigma\theta)H(\theta s)d\theta &= h(\sigma s)\\ H(\sigma s) + \lambda\int H(\sigma\theta)h(\theta s)d\theta &= h(\sigma s), \end{aligned} \tag{30}$$

die, wie gezeigt, immer gleichzeitig lösbar sind und durch dieselbe Funktion $H(\sigma s)$ befriedigt werden. Die Lösung ergibt sich, wie auf S. 31 gezeigt, als Quotient zweier ganzer Funktionen von $\lambda$

$$H(\sigma s) = \frac{D_\lambda(\sigma, s)}{D(\lambda)} \tag{31}$$

und zwar ist der Nenner $D(\lambda)$ von der Lage der Punkte $\sigma$ und $s$ nicht abhängig. Die Funktionen $\nu(s)$ und $\mu'(s)$ findet man nunmehr in der Form

$$\begin{aligned} \nu(s) &= f(s) - \lambda\int f(\sigma)H(\sigma s)d\sigma\\ \mu'(s) &= f'(s) - \lambda\int H(s\sigma)f'(\sigma)\,d\sigma. \end{aligned} \tag{32}$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Werte für $\nu(s)$ und $\mu'(s)$ in die Potentiale (28) nehmen diese die Gestalt an

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{\lambda}{\pi}\int f(\sigma)\left\{\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y-y_\sigma}{x-x_\sigma} - \lambda\int H(\sigma\theta)\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y-y_\theta}{x-x_\theta}\cdot d\theta\right\}d\sigma\\ V(p) &= \frac{\lambda}{\pi}\int\left\{\log\frac{1}{r_{\sigma p}} - \lambda\int\log\frac{1}{r_{p\theta}}\cdot H(\theta\sigma)d\theta\right\}\cdot f'(\sigma)d\sigma. \end{aligned} \tag{33}$$

Dies ist eine Lösung der Probleme, die alles leistet, was man von ihr nur verlangen kann. Man muß sich aber freilich vorerst davon Rechenschaft geben, ob die Funktion $H(\sigma s)$, die hier die ausschlaggebende Rolle spielt, nicht etwa keinen Sinn hat, weil in der Darstellung (31) von $H(\sigma s)$ Fredholms Nenner $D(\lambda)$ gerade verschwindet. Es ist also unumgänglich notwendig sich über die Lage der Nullpunkte von $D(\lambda)$, die nach den Ergebnissen des II. Abschnittes stets Pole von $H(\sigma s)$ sind, näher zu orientieren. Von diesen „singulären" Parameterwerten können wir aber zwei sehr wichtige Sätze beweisen.

Die beiden Sätze lauten:

*Die singulären Parameterwerte sind sämtlich reell, absolut nicht kleiner als Eins und können sich nur im Unendlichen häufen.*

*Die singulären Parameter sind einfache Pole der Funktion $H(\sigma s)$.*

Zum Nachweis dieser Sätze muß man berücksichtigen, daß im Falle eines singulären Parameters $\lambda_0$ immer die homogenen Integralgleichungen und dann auch die homogenen Probleme (29) ($f(s) = f'(s) = 0$) lösbar sind. Es gibt also Lösungen von

$$\text{(27'a)} \qquad \nu(s) + \lambda_0 \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = 0$$

$$\text{(27'b)} \qquad \mu'(s) + \lambda_0 \int h(s\sigma) \mu'(\sigma) d\sigma = 0,$$

die auf Potentiale $W$ und $V$ mit den Eigenschaften

$$\text{(29'a)} \qquad (1 + \lambda_0) W(s^+) - (1 - \lambda_0) W(s^-) = 0$$

$$\text{(29'b)} \qquad (1 + \lambda_0) \frac{\partial V}{\partial n}(s^-) - (1 - \lambda_0) \frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = 0$$

führen.

Von den Potentialen $V$ haben wir zunächst zu zeigen, daß sie im Unendlichen regulär sind, wenn nicht $\lambda_0$ gerade $-1$ ist. Das Verschwinden der Masse ist aber aus der zweiten Gleichung (27') oder der zweiten in (29') durch Multiplikation mit $ds$ und Integration über die Berandung leicht zu erkennen. Man findet

$$(1 + \lambda_0) \int \mu'(s) ds = 0 \quad \text{oder} \quad (1 + \lambda_0) \int \frac{\partial V}{\partial n}(s^-) ds = 0;$$

dies aber beweist die Behauptung. Nach dieser Erkenntnis ist die Anwendbarkeit der Greenschen Formeln erst sichergestellt.

Daß die Parameterwerte $\lambda_0$ reell sind, ergibt sich durch folgende Überlegung. Wären die Parameterwerte komplex, z. B. $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, so könnten die Funktionen $\nu(s)$ und $\mu'(s)$, also auch $W$ und $V$, nicht reell sein, sondern es würde jedes Potential in zwei andere zerfallen, ein reelles und ein rein imaginäres. Jedes dieser Potentiale hätte für sich natürlich eine verschwindende Masse. Wir setzen $V = u + iv$, $\lambda = \alpha + i\beta$ und bekommen aus der zweiten der Gleichungen (29')

$$(1 + \alpha) \frac{\partial u^-}{\partial n} - (1 - \alpha) \frac{\partial u^+}{\partial n} - \beta \left( \frac{\partial v^-}{\partial n} + \frac{\partial v^+}{\partial n} \right) = 0 \qquad v \,|\, u$$

$$(1 + \alpha) \frac{\partial v^-}{\partial n} - (1 - \alpha) \frac{\partial v^+}{\partial n} + \beta \left( \frac{\partial u^-}{\partial n} + \frac{\partial u^+}{\partial n} \right) = 0 \qquad -u \,|\, v$$

durch einfache Trennung des Reellen vom Imaginären. Die beiden Potentiale $u$ und $v$ sind für sich Potentiale der einfachen Schicht, also am Rande stetig. Die Anwendbarkeit der Greenschen Formeln für solche Potentiale der einfachen Schicht steht außer Zweifel. Multipliziert man diese beiden Gleichungen, wie angedeutet, so ergibt sich unter Rücksichtnahme auf die Formel $\int \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n}\right) ds = 0$ durch Addition und Integration

$$\beta \{[u^+] + [v^+] - [u^-] - [v^-]\} = 0$$
$$\alpha \{[u^+] + [v^+] - [u^-] - [v^-]\} = [u^+] + [v^+] + [u^-] + [v^-],$$

wo unter $[u^+]$ und $[u^-]$ die für alle nicht konstanten Potentiale positiven Größen

$$[u^+] = -\int u \frac{\partial u^+}{\partial n} ds, \quad [u^-] = \int u \frac{\partial u^-}{\partial n} ds \quad \text{usw.}$$

zu verstehen sind.*) Die Realität erkennt man jetzt leicht. Da $[u^+] + \cdots + [v^-]$ nicht verschwinden kann, kann auch der Faktor von $\alpha$, d. h. auch der Faktor von $\beta$ nicht Null sein. Dann aber ist $\beta = 0$ und $\lambda_0$ reell. Aus diesem Grunde kann auch $V$ selbst reell angenommen werden, d. h. $v = 0$, $V = u$ gesetzt werden. Da jetzt $\alpha = \lambda_0$ ist, hat man

$$\lambda_0 \{[V^+] - [V^-]\} = [V^+] + [V^-].$$

Das positive Vorzeichen von $[V^+]$ und $[V^-]$ gibt die Folgerung, daß der absolute Wert von $\lambda_0$ nicht kleiner ist als Eins. Damit ist der erste Satz vollständig bewiesen. Eine Häufung von Nullstellen der ganzen Funktion $D(\lambda)$ kann es nicht geben außer im Unendlichen.

Die Richtigkeit des zweiten Satzes erkennen wir folgendermaßen: Nehmen wir an, $\lambda_0$ wäre ein $n$-facher Pol von $H(\sigma s)$. Wir hätten dann eine Entwicklung

$$H(\sigma s) = \frac{P(\sigma s)}{(\lambda - \lambda_0)^n} + \frac{P_1(\sigma s)}{(\lambda - \lambda_0)^{n-1}} + \cdots$$

in der $P(\sigma s)$ nicht identisch bei allen $s$ verschwindet. Wählen wir nun für die Funktionen $P(\sigma s)$ und $P_1(\sigma s)$ die Abkürzungen $P(\sigma s) = p(\sigma)$, $P_1(\sigma s = p_1(\sigma)$, indem wir für $s$ einen festen Punkt nehmen, so bekommen wir, sobald $n > 1$ die zwei folgenden Gleichungen

$$p(\sigma) + \lambda_0 \int h(\sigma\theta) p(\theta) d\theta = 0,$$
$$p_1(\sigma) + \lambda_0 \int h(\sigma\theta) p_1(\theta) d\theta = \int h(\sigma\theta) p(\theta) d\theta = \frac{-1}{\lambda_0} p(\sigma),$$

man muß nur die obige Entwicklung für $H(\sigma s)$ in die Integralgleichung $H(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma\theta) H(\theta s) d\theta = h(\sigma s)$ eintragen und die Koeffizienten der Potenzen von $\lambda - \lambda_0$ vergleichen. Wählt man nun die Funktionen $p(\sigma)$ und $p_1(\sigma)$ als Dichtigkeit von Potentialen $v$ und $v_1$ der einfachen Schicht, so zeigen die Gleichungen für $p(\sigma)$ und $p_1(\sigma)$ nach S. 25 das Bestehen von

$$\frac{\partial v^-}{\partial n} - \frac{\partial v^+}{\partial n} + \lambda_0 \left(\frac{\partial v^-}{\partial n} + \frac{\partial v^+}{\partial n}\right) = 0 \qquad \Big| \; v_1$$
$$\frac{\partial v_1^-}{\partial n} - \frac{\partial v_1^+}{\partial n} + \lambda_0 \left(\frac{\partial v_1^-}{\partial n} + \frac{\partial v_1^+}{\partial n}\right) = -\frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\partial v^-}{\partial n} - \frac{\partial v^+}{\partial n}\right). \qquad \Big| \; -v$$

*) Die positive Richtung der Normale zielt ins Innengebiet, deshalb steht in $[u^-]$ vor dem Integral das entgegengesetzte Zeichen wie in $[u^+]$.

Multipliziert man diese beiden Gleichungen, wie angedeutet, so ergibt sich durch Integration und Addition

$$[v^+] + [v^-] = 0,$$

woraus das identische Verschwinden von $v$ folgt. Denn, da $v$ die erste der beiden obigen Gleichungen befriedigt, so hat es, falls nicht gerade $\lambda_0 = -1$ ist, die Masse Null, falls aber $\lambda_0 = -1$, folgt aus den beiden obigen Gleichungen $\frac{\partial v^-}{\partial n} = -2\frac{\partial v_i^+}{\partial n}$ und daraus durch Integration wieder das Verschwinden der Masse. Bei nicht konstanten Potentialen mit der Masse Null sind aber $[v^+]$ und $[v^-]$ positiv. Es ist also das Potential $v$ der einfachen Schicht sowohl im Innen- als im Außengebiete konstant und infolge der Stetigkeit am Rande und des Wertes Null im Unendlichen überall Null. Dies würde, gegen unsere Annahme, $p(\sigma) = 0$ ergeben. Also ist $n = 1$ und der zweite Satz bewiesen.

## § 25.

## Die singulären Werte $\lambda_0 = \pm 1$ und die Leiterpotentiale.

Die Werte $\lambda_0 = +1$ und $\lambda_0 = -1$ sind die absolutkleinsten $\lambda$-Werte, für welche ein Verschwinden des Fredholmschen Nenners $D(\lambda)$ eintreten kann. Diese beiden Parameterwerte sind aber gerade diejenigen, welche der ursprünglichen Fragestellung nach Potentialen mit gegebenen Randwerten entsprechen. Weil für einen singulären $\lambda$-Wert die obige Lösung versagt, so ist die Wichtigkeit der Frage, ob denn $\pm 1$ wirklich singuläre Parameterwerte sind, einleuchtend.

Zunächst untersuchen wir $\lambda_0 = 1$. Dieser Wert kann kein singulärer Wert für den Parameter $\lambda$ sein. Wäre dies nämlich der Fall, so hätte man gleichzeitig Lösungen der beiden homogenen Probleme $W(s^+) = 0$ und $\frac{\partial V}{\partial n}(s^-) = 0$. Daraus läßt sich aber leicht erschließen, daß sowohl das Potential der doppelten Schicht $W$, als das der einfachen Schicht $V$ identisch Null ist. Das Potential $V(p)$ hat normale Ableitungen d. h. differentiierbar verteilte Masse, so daß die Greenschen Formeln anwendbar sind. Man bekommt nun $\int V \frac{\partial V^-}{\partial n} ds = 0$, woraus das Konstantsein von $V(p)$ im Außengebiete folgt. Das Potential $V(p)$ hat im Unendlichen den Wert Null, verschwindet also im ganzen Außengebiete, deshalb am Rande, also auch im Innengebiete. Es gibt somit keine von Null verschiedene Lösung des Problems und $+1$ kann kein singulärer Parameter sein.

Nunmehr ist noch der Parameter $\lambda_0 = -1$ zu untersuchen. Hier handelt es sich um die Lösbarkeit der folgenden beiden Integralgleichungen und Randwertprobleme

$$(34)\quad \begin{aligned} &\text{a)} \quad \nu(s) - \int \nu(\sigma) h(\sigma s)\, d\sigma = 0, \ \text{d. h.}\ W(s^-) = 0 \\ &\text{b)} \quad \mu'(s) - \int \mu'(\sigma) h(s\sigma)\, d\sigma = 0, \ \text{d. h.}\ \frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = 0, \end{aligned}$$

wobei $\nu(s)$ die Belegung von $W(p)$ und $\mu'(s)$ die Dichtigkeit in $V(p)$ ist. Die Anwendbarkeit der Greenschen Formel auf das Potential $V$ ist vorhanden. *Wir betrachten zunächst den Fall, daß das Regularitätsgebiet von einem einzigen Kurvenzug begrenzt ist.* Eine Lösung des Problems $W(s^-) = 0$ bzw. $\nu(s) - \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = 0$ können wir hier gleich angeben, nämlich $\nu(s) =$ konstant, da sich ja nach (15), S. 19, für das Integral $\int h(\sigma s) d\sigma$ der Wert Eins ergeben hat. Dies gibt für $W$ im Außengebiete Null, im Innengebiete eine Konstante. Es gibt also jedenfalls mindestens eine Lösung der homogenen adjungierten Integralgleichung

$$\mu'(s) - \int h(s\sigma)\mu'(\sigma) d\sigma = 0,$$

d. h., was dasselbe ist, des Problemes $\frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = 0$. Wie früher schließt man, daß $V(p)$ im Innengebiete konstant ist, konstant also auch auf dem Rande. Das Potential hat aber jetzt gewiß nicht die Masse Null, da es sonst im Unendlichen regulär wäre, also auch im Außengebiete konstant, folglich, wie früher, allenthalben Null sein müßte. Dies ist nicht der Fall, da es ja mindestens eine von Null verschiedene Lösung von $\mu'(s) - \int h(s\sigma)\mu'(\sigma) d\sigma = 0$ geben muß. Nun ist es aber auch leicht zu zeigen, daß diese Lösung die einzig vorhandene ist, natürlich abgesehen von einem konstanten Faktor. Würde es nämlich noch eine Lösung $\mu_1'(s)$ geben, so ließe sich mit Hilfe einer geeigneten Konstanten $c$ erreichen, daß $\mu_1'(s) - c\mu'(s)$ bei der Integration über den Rand Null ergeben würde. Der Ausdruck $\mu_1'(s) - c\mu'(s)$ ist aber wieder eine Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\mu'(s) - \int h(s\sigma)\mu'(\sigma) d\sigma = 0,$$

führt also auf ein Potential $V$, welches $\frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = 0$ genügt, *aber die Masse Null hat.* Dieses ergibt sich nun konstant gleich Null, womit gezeigt ist, daß $\mu_1'(s) = c\mu'(s)$, daß also nur $\mu'(s)$ als einzige unabhängige Lösung existiert. Diese Untersuchung zeigt also, daß $\lambda_0 = -1$ tatsächlich eine singuläre Stelle für den Parameter $\lambda$ ist; es ergibt sich zugleich, daß es in diesem Fall nur eine einzige Lösung der homogenen Integralgleichung

$$\nu(s) - \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = 0, \tag{34a}$$

sowie eine Lösung der adjungierten homogenen

$$\mu'(s) - \int h(s\sigma)\mu'(\sigma) d\sigma = 0 \tag{34b}$$

gibt. Die einzige Lösung der ersten dieser Gleichungen ist, wie gezeigt, eine Konstante und wir können diese Konstante $= 1$ wählen, also $\nu(s) = 1$ setzen. Da gezeigt worden ist, daß die Funktion $H(\sigma s)$ nur einfache Pole hat, so besitzt $H(\sigma s)$ für die Umgebung von $\lambda = -1$ eine Entwicklung $H(\sigma s) = \frac{P(\sigma s)}{\lambda + 1} + \cdots$, worin $P(\sigma s)$ nach S. 38 als eine Summe von Produkten je einer Lösung von (34a) und einer Lösung von (34b) dargestellt ist.

Es gibt aber hier nur eine Lösung von (34a) und diese ist $= 1$. Wir haben also für $H(\sigma s)$ die Entwicklung

$$H(\sigma s) = \frac{\mathfrak{m}'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma s), \tag{35}$$

worin die Funktion $\mathfrak{H}(\sigma s)$ für $\lambda = -1$ regulär ist. Die vorhandene Lösung $\mu'(s)$ wurde hier mit $\mathfrak{m}'(s)$ bezeichnet, so daß also $\mathfrak{m}'(s)$ die Gleichung erfüllt

$$\mathfrak{m}'(s) = \int h(s\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma. \tag{36}$$

Aus der Integralbeziehung $(\chi)$, S. 38, folgt, da $\nu(s) = 1$ ist, die Gleichung

$$\int \mathfrak{m}'(s)\,ds = 1. \tag{37}$$

Bei dieser Untersuchung hat sich auch ergeben, daß $\mathfrak{m}'(s)$ als Dichte eines Potentials der einfachen Schicht gewählt, ein solches Potential gibt, das im Innengebiete konstant ist und also auch am Rande einen konstanten Wert hat. *Dieses ausgezeichnete Potential der einfachen Schicht, welches am Rande konstant ist und die Masse $= 1$ hat, wollen wir mit $\Gamma(p)$ bezeichnen, also*

$$\Gamma(p) = \int \log\frac{1}{r_{ps}}\cdot\mathfrak{m}'(s)\,ds \tag{38}$$

*setzen und Leiterpotential nennen. Die Funktion $\mathfrak{m}'(s)$, die es erzeugt, heißt natürliche Belegung (Leiterbelegung).*

Die Benennung „Leiterpotential" und „Leiterbelegung" sind einer physikalischen Erscheinung bei der Ladung von Konduktoren mit statischer Elektrizität entnommen.

Bei Vorhandensein von mehreren getrennten Leitern gibt es verschiedene Potentiale mit konstanten Randwerten auf jedem einzelnen Leiter, je nach der Ladung auf den einzelnen Konduktoren. Wir wollen zusehen, wie sich die Existenz dieser Potentiale bei uns von selbst ergibt. *Wir haben also jetzt anzunehmen, daß es $n$ getrennt liegende sich ausschließende geschlossene Randkurven gibt.* Untersuchen wir in diesem Falle den Parameterwert $\lambda_0 = -1$, d. h. die Integralgleichungen bzw. Randwertaufgaben

$$(34)\quad \begin{array}{ll} \text{a)} & \nu(s) - \int \nu(\sigma)h(\sigma s)d\sigma = 0, \ \text{d. h.}\ W(s^-) = 0 \\ \text{b)} & \mu'(s) - \int h(s\sigma)\mu'(\sigma)ds = 0, \ \text{d. h.}\ \frac{\partial V}{\partial n}(\sigma^+) = 0. \end{array}$$

In diesem Falle kann man sofort $n$ Lösungen der ersten dieser Integralgleichungen angeben. Wir wählen nacheinander für $\nu(s)$ solche $n$ Werte, daß jedes der $\nu(s)$ nur auf je einer Randkurve von Null verschieden und zwar $= 1$ ist; es soll also auf der

$$(39\text{a})\quad \begin{array}{llllll} 1. & \text{Randkurve} & \nu_1(s) = 1, & \nu_2(s) = 0, & \ldots & \nu_n(s) = 0 \\ 2. & \text{"} & \nu_1(s) = 0, & \nu_2(s) = 1, & \ldots & \nu_n(s) = 0 \\ \cdots & & \cdots & \cdots & & \cdots \\ n. & \text{"} & \nu_1(s) = 0, & \nu_2(s) = 0, & \ldots & \nu_n(s) = 1 \end{array}$$