Man hat ursprünglich bei der Behandlung der Randwertaufgabe zunächst auch die Annahme gemacht, daß das Gebiet, in welchem das gesuchte Potential regulär sein soll, nur durch einen einzigen Kurvenzug begrenzt wird. Diese Annahme ist für uns nicht nötig, vielmehr kann das Regularitätsgebiet einen beliebigen Zusammenhang aufweisen. So ist z. B. ein in der Anwendung häufig auftretender Fall der, daß es sich um das Außengebiet handelt, welches außerhalb mehrerer sich ausschließender, für sich geschlossener Kurven liegt. Wenn da ein Potential gesucht wurde, das gegebene Randwerte auf diesen Kurven annimmt und im Außengebiete überall (also auch im Unendlichen) regulär ist, so hat man bisher meistens sogenannte kombinatorische Methoden zu Hilfe genommen. Bei uns erledigt sich dieser Fall in einem. Wenn es sich um solche Gebiete handelt, so wird man nur darauf zu achten haben, daß sich die Integration in den Potentialen V und W, die in unserer Untersuchung eine große Rolle spielen werden, über die ganze Berandung erstreckt, d. h. über alle Randkurven. Eine Spaltung in einzelne Integrale ist ja nicht nötig. Die Funktionen $\log r_{s\sigma}$, wie $\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ und $h(s, \sigma)$ behalten denselben Sinn, wo die beiden Randpunkte s und σ liegen; sie brauchen also gar nicht beide auf demselben Kurvenzuge zu liegen.

§ 22.

Die Formulierung des Neumann-Poincareschen Problemes. Das Problem der Bestimmung eines Potentiales mit gegebenen Randwerten wurde von Poincaré in der Weise verallgemeinert, daß nach einem Potentiale gefragt wird, bei dem eine lineare Verknüpfung beiderseitiger Randwerte gegeben ist. Es wird also eigentlich nach zwei Potentialen gefragt, von denen eines im Innengebiete, eines im Außengebiete definiert ist und deren Randwerte in jedem Randpunkte in einer linearen Kombination vorgegeben sind. Dadurch wurde ein Parameter eingeführt, bei dessen spezieller Wahl die ursprünglichen Aufgaben sich ergeben. Das Problem lautet:

Man suche ein Potential der Doppelschicht $W(p)$, welches in jedem Punkte s der Begrenzung der Gleichung

$$\frac{1+\lambda}{2\lambda} \cdot W(s^+) - \frac{1-\lambda}{2\lambda} \cdot W(s^-) = f(s) \tag{20}$$

entspricht, worin $W(s^+)$ der innere, $W(s^-)$ der äußere Randwert des Potentials im Randpunkte s, $f(s)$ aber eine gegebene Ortsfunktion in der Berandung ist.

Zu dieser Problemstellung sei sofort hinzugefügt, daß die Forderung, $W(p)$ müsse ein Potential der Doppelschicht sein, ganz wesentlich ist. Ließe man diese Forderung fallen, so wären die Lösungen des Problems gar nicht bestimmt, außer für $\lambda = \pm 1$.

Man kann die Gleichung (20) auch in der Form schreiben

$$W(s^+) - W(s^-) + \lambda\{W(s^+) + W(s^-)\} = 2\lambda f(s). \tag{20a}$$

Die spezielle Wahl der Werte $\lambda = \pm 1$ führt, wie man unmittelbar sieht, auf die beiden Probleme $W(s^+) = f(s)$ bezw. $W(s^-) = f(s)$, wo also die Randwerte des Potentials gegeben sind.

Potentiale der verlangten Art kann man nach Fredholm leicht finden. Setzen wir das Potential $W(p)$ in der Form an

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int \nu(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds, \tag{21}$$

so ergeben uns die Gleichungen (A_2) Seite 22*), die zwischen den beiderseitigen Randwerten der Potentiale der Doppelschicht bestehen, die Fredholmsche Integralgleichung

$$\nu(s) + \lambda \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = f(s) \tag{22}$$

worin, wie bisher

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} \tag{23}$$

gesetzt wurde. In der Integralgleichung (22) ist die Funktion $f(s)$ bekannt, bekannt ist ferner die Funktion $h(\sigma s)$, die nur von der Form der Berandung abhängt, so wie auch die Integrationskurve. Die Integration ist nämlich über die ganze Berandung zu erstrecken, also über alle Randkurven, falls das Regularitätsgebiet mehrfach zusammenhängend wäre.

Durch die Aufstellung der Integralgleichung (22) ist ein großer Schritt getan; darin ist nämlich alles enthalten, was zur Lösung der Randwertaufgabe nötig ist, so daß es jetzt nicht mehr erforderlich ist, Eigenschaften der Potentiale bei der Lösung der Randwertaufgabe in Betracht zu ziehen, da die Integralgleichung schon bei irgendwelcher stetiger Funktion $h(\sigma s)$ lösbar ist. Es läßt sich aber auch leicht einsehen, *daß die Integralgleichung* (22) *völlig aequivalent ist dem Randwertproblem*, sobald $h(\sigma s)$ gerade die in (23) definierte Funktion ist, und die Integration über die Berandung erstreckt wird. Zunächst wissen wir ja, das jedes Potential W den Gleichungen (A_2) S. 22 genügt, aus denen wir die Integralgleichung hergeleitet haben. Die Integralgleichung enthält also alle Lösungen des Problems (20). Sie enthält aber auch nicht mehr; denn jede Lösung der Integralgleichung gibt auch eine Lösung des Problems, wenn die gefundene Funktion $\nu(s)$ eine solche ist, daß das Potential $W(p)$ mit der Belegung $\nu(s)$ die Unstetigkeit (A_2) S. 22 am Rande hat. Dies ist wirklich der Fall; sobald nämlich die Funktion $\nu(s)$ endlich und stückweise stetig ist, ist das Integral in (22) nach § 12 S. 26 schon stetig, so daß also $\nu(s)$ dort stetig ist, wie die gegebene Funktion $f(s)$. Unter diesen Voraussetzungen über die Belegung $\nu(s)$ sind aber die Eigenschaften der Unstetigkeit von $W(p)$ am Rande, wie sie im § 10 S. 22 abgeleitet wurden, vorhanden. Das gestellte Problem ist also der Integralgleichung vollkommen gleichwertig, sobald die gegebene Randfunktion $f(s)$ endlich und wenigstens stückweise stetig ist.

---

*) Der Einfachheit wegen wurde hier die Belegung des Potentials W in der Form $\frac{\lambda}{\pi}\nu(s)$ angesetzt, was man bei der Anwendung der Gleichungen (A_2) S. 22 zu berücksichtigen hat.