Zweiter Abschnitt.

Die Integralgleichung Fredholms.

§ 14.

Die Fragestellungen der Potentialtheorie führen, wie die Folge zeigen wird, ganz naturgemäß auf die Gleichung der Form

$$(\alpha) \qquad \varphi(s) + \lambda \int \varphi(\theta) \cdot f(\theta, s) d\theta = \psi(s),$$

worin die Funktionen $f(\theta, s)$ und $\psi(s)$ bekannt sind, das Integrationsintervall ein *bestimmtes**) und gegebenes ist, während die Funktion $\varphi(s)$ gesucht werden muß. Die Größe λ spielt dabei nur die Rolle eines Parameters.

Bei kleinen λ würde man die Lösung für $\varphi(s)$ in der Form einer Potenzreihe nach λ suchen können, und würde dabei finden, daß sich $\varphi(s)$ in der Form

$$(\beta) \qquad \varphi(s) = \psi(s) - \lambda \int \psi(\theta) F(\theta s) d\theta$$

darstellen läßt, wobei $F(\theta s)$ eine von $\psi(s)$ unabhängige Funktion ist, die aus der Potenzentwicklung der Funktion $F(\sigma s)$ aus der Integralgleichung

$$(\gamma) \qquad F(\sigma s) + \lambda \int f(\sigma\theta) F(\theta s) d\theta = f(\sigma s)$$

sich ergeben würde. Tatsächlich ist aber die Darstellung von $\varphi(s)$ in der Form (β) nicht an die Entwickelbarkeit von $F(\sigma s)$ in eine Reihe gebunden. Hat man nämlich eine Lösung $F(\sigma s)$ der speziellen Integralgleichung (γ), so ergibt sich aus (α) die Lösung $\varphi(s)$ stets in der Form (β). Man hat nur (α) mit $F(s\sigma) ds$ zu multiplizieren und nach s zu integrieren. Berücksichtigt man dann unter dem doppelten Integralzeichen die Gleichung (γ), der $F(s\sigma)$ genügt, so ergibt sich gleich

$$\int \varphi(\theta) f(\theta\sigma) d\theta = \int \psi(\theta) F(\theta\sigma) d\theta,$$

was in (α) berücksichtigt die Lösung (β) gibt**). Dadurch ist die Lösung der Fredholmschen Integralgleichung (α) auf die spezielle (γ) zurückgeführt.

---

*) Da das Integral in diesem ganzen Abschnitt überall über dasselbe gegebene Gebiet zu erstrecken ist, halte ich es nicht für nötig, dem Integrale noch irgendwelche Zeichen der festen Grenzen hinzuzufügen.

**) Es ist das Resultat (β) noch durch Einsetzen in (α) zu verifizieren. Dieses bestätigt sich aber infolge der zweiten Gleichung (γ_2), der $F(\sigma s)$ auch genügt. Die Verifizierung ist deshalb nötig, weil (β) nur unter der Voraussetzung der Lösbarkeit von (α) hergeleitet werden kann. Ebenso ist die Lösbarkeit beider Gleichungen (γ_1) und (γ_2) hier eine Voraussetzung, aus der dann aber folgt, daß beide Gleichungen durch dieselbe Funktion gelöst werden. Die Lösbarkeit bestätigt sich ja gleich im folgenden Paragraphen.

Die Funktion $F(\sigma s)$ genügt dann von selbst auch der Integralgleichung $F(\sigma s) + \lambda \int F(\sigma\theta) f(\theta s) d\theta = f(\sigma s)$. Dies bestätigt man, indem man in dieser Gleichung $F(\sigma s) = \varphi(s)$ setzt und nach der obigen Methode löst. Es sind also die beiden Integralgleichungen *(Resolventen)*

$$(\gamma_1) \text{ und } (\gamma_2) \qquad \begin{aligned} F(\sigma s) + \lambda \int f(\sigma\theta) F(\theta s) d\theta &= f(\sigma s), \\ F(\sigma s) + \lambda \int F(\sigma\theta) f(\theta s) d\theta &= f(\sigma s) \end{aligned}$$

durch dieselbe Funktion $F(\sigma s)$ gelöst. Zugleich ergibt sich, daß jede dieser Gleichungen nur eine Lösung hat, daß also $F(\sigma s)$ eine allenthalben eindeutige Funktion von λ ist.

§ 15.
Die Lösung Fredholms.

Die Integralgleichung

$$(\gamma) \qquad F(\sigma s) + \lambda \int F(\sigma\theta) f(\theta s) d\theta = f(\sigma s),$$

auf deren Lösung es nach dem vorherigen einzig ankommt, kann man bei überall endlich bleibender, wenigstens abteilungsweise stetiger Funktion $f(\sigma s)$ durch folgendes Verfahren lösen.

Man betrachte in (γ) das Integral als Grenzfall einer Summe. Teilt man, um dann einen Grenzübergang auszuführen, in (γ) das bestimmte Integrationsgebiet in eine große Zahl n sehr kleiner Elemente, die kurz mit $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ bezeichnet werden mögen, so können innerhalb jedes Teiles $\delta_\varkappa$ die Funktionen $F(\sigma s)$ und $f(\sigma s)$ als konstant angesehen werden. Bezeichnet man der Kürze wegen den Wert von $F(\sigma, s)$ und $f(\sigma, s)$ mit $F_{\varkappa\mu}$ bzw. $f_{\varkappa\mu}$, wenn die Punkte σ, s in den Elementen $\delta_\varkappa$ und δ_μ liegen, so geht in (γ) das Integral in eine Summe über und man bekommt

$$F(\sigma s) - f(\sigma s) + \lambda F_{\sigma 1} \cdot f_{1s} \cdot \delta_1 + \lambda F_{\sigma 2} \cdot f_{2s} \cdot \delta_2 + \cdots + \lambda F_{\sigma n} \cdot f_{ns} \cdot \delta_n = 0.$$

Diese Gleichung muß nun richtig bleiben, wenn s nacheinander in die Elemente $\delta_1, \delta_2 \ldots \delta_n$ tritt, so daß sich für $F_{\sigma 1}, F_{\sigma 2} \ldots F_{\sigma n}$ folgende n Gleichungen ergeben

$$\begin{gathered} -f_{\sigma 1} + F_{\sigma 1}[1 + \lambda f_{11} \cdot \delta_1] + F_{\sigma 2} \cdot \lambda f_{21} \cdot \delta_2 + \cdots + F_{\sigma n} \cdot \lambda f_{n1} \cdot \delta_n = 0 \\ -f_{\sigma 2} + F_{\sigma 1} \cdot \lambda f_{12} \cdot \delta_1 + F_{\sigma 2} \cdot [1 + \lambda f_{22} \cdot \delta_2] + \cdots + F_{\sigma n} \cdot \lambda f_{n2} \cdot \delta_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -f_{\sigma n} + F_{\sigma 1} \cdot \lambda f_{1n} \cdot \delta_1 + F_{\sigma 2} \cdot \lambda f_{2n} \cdot \delta_2 + \cdots + F_{\sigma n}[1 + \lambda f_{nn} \cdot \delta_n] = 0. \end{gathered}$$

Aus diesen Gleichungen und der obigen

$$F(\sigma s) - f(\sigma s) + F_{\sigma 1} \cdot \lambda f_{1s} \cdot \delta_1 + F_{\sigma 2} \cdot \lambda f_{2s} \cdot \delta_2 + \cdots + F_{\sigma n} \cdot \lambda f_{ns} \cdot \delta_n = 0$$

sind die Größen $F_{\sigma 1}, F_{\sigma 2} \ldots F_{\sigma n}$ zu eliminieren, wodurch sich die gesuchte Funktion $F(\sigma, s)$ ergibt. Die Elimination geschieht am einfachsten durch Bildung der Determinante

$$(\delta)\quad 0 = \begin{vmatrix} F(\sigma s) + f(\sigma s), & \lambda f_{1s}\cdot\delta_1, & \lambda f_{2s}\cdot\delta_2, & \ldots & \lambda f_{ns}\cdot\delta_n \\ f_{\sigma 1}, & 1+\lambda f_{11}\cdot\delta_1, & \lambda f_{21}\cdot\delta_2, & \ldots & \lambda f_{n1}\cdot\delta_n \\ f_{\sigma 2}, & \lambda f_{13}\cdot\delta_1, & 1+\lambda f_{22}\cdot\delta_2, & \ldots & \lambda f_{n2}\cdot\delta_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\sigma n}, & \lambda f_{1n}\cdot\delta_1, & \lambda f_{2n}\cdot\delta_2, & \ldots & 1+\lambda f_{nn}\cdot\delta_n \end{vmatrix}.$$

Um den Grenzübergang zu machen, entwickelt man diese Determinante nach Potenzen von λ. Es ist leicht einzusehen, daß der Koeffizient von λ^m eine Summe von $m+1$ reihigen Determinanten ist und zwar ist dieser Koeffizient

$$\sum_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_m} \begin{vmatrix} -F(\sigma s)+f(\sigma s), & f_{\varkappa_1 s}, & f_{\varkappa_2 s}, & \ldots f_{\varkappa_m s} \\ f_{\sigma\varkappa_1}, & f_{\varkappa_1\varkappa_1}, & f_{\varkappa_2\varkappa_1}, & \ldots f_{\varkappa_m\varkappa_1} \\ f_{\sigma\varkappa_2}, & f_{\varkappa_1\varkappa_2}, & f_{\varkappa_2\varkappa_2}, & \ldots f_{\varkappa_m\varkappa_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{\sigma\varkappa_m}, & f_{\varkappa_1\varkappa_m}, & f_{\varkappa_2\varkappa_m}, & \ldots f_{\varkappa_m\varkappa_m} \end{vmatrix} \delta_{\varkappa_1}\cdot\delta_{\varkappa_2}\ldots\delta_{\varkappa_m},$$

wobei die Indizes $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots \varkappa_m$ alle möglichen Kombinationen von je m Elementen aus den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ *ohne Wiederholungen* sind. Zwischen den m Zahlen sind aber $m!$ Permutationen möglich, woraus folgt, daß man die Summe genau $m!$-mal bekommt, wenn man die Indizes unabhängig voneinander jeden nacheinander die Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ durchlaufen läßt*). Dann ist es aber evident, daß im Grenzfalle die Summation über den Index $\varkappa_1$ ein Integral wird und dasselbe gilt von der Summation über die Indizes $\varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa_m$. Daraus folgt also, daß nach dem Grenzübergange die Determinante (δ) zur folgenden Reihe wird

$$0 = -F(\sigma s) + f(\sigma s)$$

$$+\sum_{m=1}^{m=\infty}\frac{\lambda^m}{m!}\int\!\!\int\cdots\int \begin{vmatrix} -F(\sigma s)+f(\sigma s), & f(\theta_1 s), & f(\theta_2 s) & \ldots f(\theta_m s) \\ f(\sigma\theta_1), & f(\theta_1\theta_1), & f(\theta_2\theta_1) & \ldots f(\theta_m\theta_1) \\ f(\sigma\theta_2), & f(\theta_1\theta_2), & f(\theta_2\theta_2) & \ldots f(\theta_m\theta_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\sigma\theta_m), & f(\theta_1\theta_m), & f(\theta_2\theta_m) & \ldots f(\theta_m\theta_m) \end{vmatrix} d\theta_1 d\theta_2\ldots d\theta_m.$$

Dies gibt für $F(\sigma s)$ den Quotienten

$$(\varepsilon)\qquad F(\sigma s) = \frac{D_\lambda\binom{\sigma}{s}}{D(\lambda)},$$

wobei mit $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$ und $D(\lambda)$ die beiden Potenzreihen bezeichnet wurden

*) Die Gleichheit zweier Indizes ist ja zulässig, da in einem solchen Falle die Determinante gleich Null ist.

$$D_\lambda\binom{\sigma}{s} = f(\sigma s) + \frac{\lambda}{1}\int\begin{vmatrix} f(\sigma s), & f(\theta_1 s) \\ f(\sigma\theta_1), & f(\theta_1\theta_1)\end{vmatrix} d\theta_1 +$$

$$+\frac{\lambda^2}{2!}\int\!\!\int\begin{vmatrix} f(\sigma s), & f(\theta_1 s), & f(\theta_2 s) \\ f(\sigma\theta_1), & f(\theta_1\theta_1), & f(\theta_2\theta_1) \\ f(\sigma\theta_2), & f(\theta_1\theta_2), & f(\theta_2\theta_2)\end{vmatrix} d\theta_1 d\theta_2 + \cdots$$

$$(\zeta) \qquad D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{1}\int f(\theta\theta)\,d\theta + \frac{\lambda^2}{2!}\int\!\!\int\begin{vmatrix} f(\theta_1\theta_1), & f(\theta_2\theta_1) \\ f(\theta_1\theta_2), & f(\theta_2\theta_2)\end{vmatrix} d\theta_1 d\theta_2 +$$

$$+\frac{\lambda^3}{3!}\int\!\!\int\!\!\int\begin{vmatrix} f(\theta_1\theta_1), & f(\theta_2\theta_1), & f(\theta_3\theta_1) \\ f(\theta_1\theta_2), & f(\theta_2\theta_2), & f(\theta_3\theta_2) \\ f(\theta_1\theta_3), & f(\theta_2\theta_3), & f(\theta_3\theta_3)\end{vmatrix} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 + \cdots$$

Diese beiden Reihen haben ein sehr leicht zu überblickendes Bildungsgesetz.

Die Konvergenz der erhaltenen Reihen ergibt sich aus einem Satze Hadamards, wonach eine Determinante von n Reihen, deren Glieder nicht über den Absolutbetrag 1 gehen, den Wert $n^{\frac{n}{2}}$ nicht überschreiten kann. Dieser Abschätzungssatz genügt, weil die Glieder noch den Nenner $n!$ besitzen, um zu erkennen, daß beide Reihen $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$ und $D(\lambda)$ konvergieren und zwar sogar für jedes endliche λ, so daß sie ganze Funktionen des Parameters λ sind. Ein Einsetzen von (ε) und (ζ) in die Integralgleichung für $F(\sigma s)$ würde leicht das Erfülltsein der Integralgleichung bestätigen. In dieser eleganten Form wurde von Fredholm die Lösung für $F(\sigma s)$ angegeben.*)

§ 16.

Die Fredholmsche Darstellung (ε) der Lösung der Integralgleichung zeigt die Lösbarkeit in allen Fällen, wo der Nenner $D(\lambda)$ von Null verschieden ist. Das Verschwinden von $D(\lambda)$ kann aber nur in isolierten Punkten für λ vorkommen. Ist λ_0 ein Wert, für den $D(\lambda_0) = 0$ ist, so sind sicher die Ableitungen $D'(\lambda)$, $D''(\lambda)$, . ., nach λ nicht alle im Punkte λ_0 gleich Null. Bildet man sich diese Ableitungen, so wird man auf neue zur Reihe $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$ analoge Potenzreihen geführt. Mit Fredholm setzen wir

$$(\eta) \qquad f\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(\sigma_1 s_1), & f(\sigma_2 s_1), & \ldots & f(\sigma_n s_1) \\ f(\sigma_1 s_2), & f(\sigma_2 s_2), & \ldots & f(\sigma_n s_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f(\sigma_1 s_n), & f(\sigma_2 s_n), & \ldots & f(\sigma_n s_n)\end{vmatrix},$$

um für die Determinanten eine kürzere Schreibweise zu bekommen. Die Bildung der Differentialquotienten gibt Veranlassung zur Betrachtung von folgenden Reihen

$$(\vartheta) \qquad D_\lambda\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \ldots & \sigma_n \\ s_1 & s_2 & \ldots & s_n\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\sigma_1 & \ldots & \sigma_n \\ s_1 & \ldots & s_n\end{pmatrix} + \frac{\lambda}{1!}\int f\begin{pmatrix}\sigma_1 & \ldots & \sigma_n & \theta \\ s_1 & \ldots & s_n & \theta\end{pmatrix} d\theta +$$

$$\frac{\lambda^2}{2!}\int\!\!\int f\begin{pmatrix}\sigma_1 \ldots \sigma_n & \theta_1 & \theta_2 \\ s_1 \ldots s_n & \theta_1 & \theta_2\end{pmatrix} d\theta_1 d\theta_2 + \frac{\lambda^3}{3!}\int\!\!\int\!\!\int f\begin{pmatrix}\sigma_1 & \ldots & \sigma_n & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ s_1 & \ldots & s_n & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3\end{pmatrix} d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 + \cdots$$

*) Oefvers af kongl. vet. akad. Förh., Stockholm 1900. Acta mat. 27, 1903.

wovon die obige Reihe $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$ nur ein Spezialfall ist. Die $n$te Ableitung von $D(\lambda)$ ergibt sich als das Integral

$$(\iota)\qquad D^{(n)}(\lambda)=\int\cdots\int D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}d\sigma_1\,d\sigma_2\ldots d\sigma_n$$

und in einem ebenso einfachen Zusammenhang stehen die Ableitungen von $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$ nach λ mit diesen Reihen. Aus (ι) folgt, daß, wenn λ_0 genau eine n-fache Nullstelle von $D(\lambda)$ ist, die Funktion $D_\lambda\binom{\sigma_1\ldots\sigma_n}{\sigma_1\ldots\sigma_n}$ nicht, also umso weniger die allgemeinere $D_\lambda\binom{\sigma_1\ldots\sigma_n}{s_1\ldots s_n}$ identisch verschwinden kann, da sonst $D^{(n)}(\lambda_0)=0$ wäre. Es verschwindet ebenso auch nicht $D_\lambda^{(n-1)}\binom{\sigma}{s}$ d. h. die $(n-1)$-te Ableitung von $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$. Daraus folgt aber, daß in $F(\sigma,s)$ die Stelle λ_0 ein Pol ist, da das Verschwinden des Zählers $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$ von niedrigerer Ordnung als das des Nenners $D(\lambda)$ ist. Die Lösbarkeit der Fredholmschen Integralgleichung (α) ist also in Frage gestellt, jene der Resolvente (γ) aber geradezu als unmöglich erkannt.

Die Reihen $D_\lambda\binom{\sigma_1\ldots\sigma_n}{s_1\ldots\sigma_n}$ genügen ähnlichen Integralgleichungen, wie $D_\lambda\binom{\sigma}{s}$. Man bekommt diese folgendermaßen. Entwickelt man in der Reihe (ϑ) alle Determinanten nach der ersten Horizontalreihe, so bekommt man

$$D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots\sigma_n}=f(\sigma_1 s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}-f(\sigma_2 s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}-$$
$$-f(\sigma_3 s_1)D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_1\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots\sigma_n}-\cdots-f(\sigma_n s_1)D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_1}{s_2\,s_3\ldots s_n}-\lambda\int D_\lambda\binom{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_n}{\theta\,s_2\ldots s_n}f(\theta s_1)d\theta$$

d. h. die Integralgleichung

$$(\varkappa_1)\qquad D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}+\lambda\int D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{\theta\,s_2\ldots s_n}f(\theta\,s_1)\,d\theta=f(\sigma_1 s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}-$$
$$-f(\sigma_2 s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}-f(\sigma_3 s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_1\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}-\cdots-f(\sigma_n s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_1}{s_2\,s_3\ldots s_n}.$$

In ganz analoger Weise ergibt sich durch Entwicklung nach der ersten Vertikalreihe die Gleichung

$$(\varkappa_2)\qquad D_\lambda\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}-\lambda\int D_\lambda\binom{\theta\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}f(\sigma_1\theta)\,d\theta=f(\sigma_1 s_1)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}-$$
$$-f(\sigma_1 s_2)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_1\,s_3\ldots s_n}-f(\sigma_1 s_3)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_1\ldots s_n}-\cdots-f(\sigma_1 s_n)\,D_\lambda\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_1}.$$

Aus diesen Integralgleichungen kann man für den Fall, daß $D(\lambda_0)=0$ ist, mit Fredholm leicht folgende Sätze nachweisen.

Es sei unter den Reihen (ϑ) *für die Funktionen* $D\binom{\sigma_1}{s_1}$, $D\binom{\sigma_1\,\sigma_2}{s_1\,s_2}$, ... $D\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}$, ... *die $n$te Funktion die erste, die nicht identisch bei allen σ, s verschwindet,* d. h. *es sei*

$$(\lambda)\qquad D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}\neq 0,$$

während alle vorangehenden $D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\ldots\sigma_k}{s_1\ldots s_k}$ *identisch Null sind.* Dann ist λ_0 mindestens eine Nullstelle $n$ter Ordnung für die Nennerfunktion $D(\lambda_0)$ und es gelten die folgenden Theoreme:

1. *Die homogene Integralgleichung*

$$(\mu_1)\qquad \Phi(s)+\lambda_0\int\Phi(\theta)\,f(\theta\,s)\,d\theta=0$$

hat genau n linear unabhängige Lösungen $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\ldots$ $\Phi_n(s)$, ebensoviele linear unabhängige Lösungen $\Psi_1(s)$, $\Psi_2(s)$, $\ldots$ $\Psi_n(s)$ hat die homogene „adjungierte" Integralgleichung

$$(\mu_2)\qquad \Psi(s)+\lambda_0\int f(s\,\theta)\,\Psi(\theta)\,d\theta=0.$$

2. *Die nichthomogene Integralgleichung*

$$(\nu)\qquad \varphi(s)+\lambda_0\int\varphi(\theta)\,f(\theta s)\,d\theta=\psi(s)$$

ist im allgemeinen nicht lösbar, wohl aber dann und nur dann, wenn die gegebene Funktion $\psi(s)$ die n Bedingungen $\int\psi(s)\,\Psi_\varkappa(s)\,ds=0$, wo $\varkappa=1\,2\ldots n$, erfüllt, wobei $\Psi_1(s)$, $\Psi_2(s)$, $\ldots$ $\Psi_n(s)$ die Lösungen der homogenen adjungierten Integralgleichung bedeuten.

Die Existenz der Lösungen $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\ldots$ $\Phi_n(s)$ ergibt sich aus der Gleichung $(\varkappa_1)$. Die rechts stehenden Funktionen $D_{\lambda_0}\binom{\sigma_2\,\sigma_3\ldots\sigma_n}{s_2\,s_3\ldots s_n}$, $\ldots$ sind nach der Annahme noch alle Null, während links die nichtidentisch verschwindende Funktion $D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}$ steht. Setzt man hierin für s_1 den Buchstaben s ein, so sieht man, daß $D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s\;\,s_2\ldots s_n}$ als Funktion von s die homogene Integralgleichung (μ_1) befriedigt. Andere Lösungen bekommt man, wenn man nacheinander für s_2, $s_3\ldots s_n$ den Buchstaben s einsetzt. Wenn nun $D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}\neq 0$ ist, was durch geeignete Wahl der $\sigma_\varkappa$ und $s_\varkappa$ erreichbar ist, so kann man die n erhaltenen Lösungen noch durch $D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}=\varDelta$ dividieren. Man bekommt also n Lösungen von (μ_1), nämlich

$$(o)\qquad \begin{aligned}\Phi_1(\mathbf{s})&=\frac{1}{\varDelta}\cdot D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{\mathbf{s}\;\,s_2\ldots s_n}\\ \Phi_2(\mathbf{s})&=\frac{1}{\varDelta}\cdot D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,\mathbf{s}\ldots s_n}.\\ &\cdots\cdots\\ \Phi_n(\mathbf{s})&=\frac{1}{\varDelta}\cdot D_{\lambda_0}\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots\mathbf{s}}\end{aligned}$$

Die lineare Unabhängigkeit dieser Funktionen erkennt man sofort aus ihrer Darstellung. Wie die Definition (η) von $f\binom{\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_n}{s_1\,s_2\ldots s_n}$ zeigt, verschwindet diese Größe, falls zwei der σ oder irgend zwei der s miteinander übereinstimmen. Aus diesem Grunde verschwindet auch die Reihe (ϑ) für $D_\lambda\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n\end{pmatrix}$, wenn zwei der $\sigma_\varkappa$ oder zwei der $s_\varkappa$ gleich werden. Berücksichtigt man diese Tatsache, so sieht man aus (o) daß

$$\begin{array}{llllll} \text{für } s = s_1\colon & \Phi_1(s_1) = 1, & \Phi_2(s_1) = 0, & \Phi_3(s_1) = 0, & \dots & \Phi_n(s_1) = 0 \\ \text{,,}\quad s = s_2\colon & \Phi_2(s_2) = 0, & \Phi_2(s_2) = 1, & \Phi_3(s_2) = 0, & \dots & \Phi_n(s_2) = 0 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot\quad\cdot & \cdot & \cdot\quad\cdot \\ \text{,,}\quad s = s_n\colon & \Phi_1(s_n) = 0, & \Phi_2(s_n) = 0, & \Phi_3(s_n) = 0, & \dots & \Phi_n(s_n) = 1 \end{array}$$

wird. Infolge dieser Gleichung kann offenbar eine in s identische Relation

$$c_1\Phi_1(s) + c_2\Phi_2(s) + \dots + c_n\Phi_n(s) = 0$$

bei nicht durchwegs identisch verschwindenden konstanten $c_1 c_2 \dots c_n$ nicht bestehen. W. z. b. w.

Ebenso, wie wir bisher n linear unabhängige Lösungen $\Phi_1(s)$, $\Phi_2(s)$, $\dots\ \Phi_n(s)$ der Integralgleichung (μ_1) aufgestellt haben, könnten wir die n linear unabhängigen Lösungen der homogenen „adjungierten" Integralgleichung (μ_2)

$$\Psi(\sigma) + \lambda\int f(\sigma\theta)\,\Psi(\theta)\,d\theta = 0$$

herschreiben. Diese wollen wir mit $\Psi_1(s)$, $\Psi_2(s)$, $\dots\ \Psi_n(s)$ bezeichnen.

Jede Lösung $\Phi(s)$ der homogenen Integralgleichung (μ_1)

$$\Phi(s) + \lambda\int \Phi(\theta) f(\theta s)\,d\theta = 0$$

erweist sich nun als eine lineare Kombination der $\Phi_\varkappa(s)$ mit konstanten Koeffizienten. Dies erkennt man, wie folgt.

Die auf $D\begin{pmatrix}\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n\\ s_1 & s_2 & \dots & s_n\end{pmatrix}$ nächstfolgende Funktion — wir können sie mit $D\begin{pmatrix}\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s\,s_1\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix}$ bezeichnen — befriedigt nach ($\varkappa_1$) die Integralgleichung

$$D\begin{pmatrix}\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s\,s_1\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix} + \lambda\int f(\sigma\,\theta)\,D\begin{pmatrix}\theta\,\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s\,s_1\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix}d\,\theta = f(\sigma\,s)\,D\begin{pmatrix}\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s_1\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix} -$$
$$- f(\sigma s_1)\,D\begin{pmatrix}\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix} - f(\sigma s_2)\,D\begin{pmatrix}\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s_1\,s \dots s_n\end{pmatrix} - \dots - f(\sigma\,s_n)\,D\begin{pmatrix}\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s_1\,s_2 \dots s\end{pmatrix}$$

und eine analoge aus ($\varkappa_2$) folgende. Dividiert man diese Gleichung durch $D\begin{pmatrix}\sigma_1 \dots \sigma_n\\ s_1 \dots s_n\end{pmatrix}$ und schreibt abkürzend

$$(\pi)\qquad \mathfrak{F}(\sigma s) = \frac{D\begin{pmatrix}\sigma\,\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s\,s_1\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix}\sigma_1\,\sigma_2 \dots \sigma_n\\ s_1\,s_2 \dots s_n\end{pmatrix}},$$

indem man $\mathfrak{F}$ nur als Funktion von σ und s auffaßt, so bekommt man für $\mathfrak{F}(\sigma s)$ die Integralgleichung

$$(\varrho_1)\qquad \mathfrak{F}(\sigma s) + \lambda\int f(\sigma\theta)\,\mathfrak{F}(\theta s)\,d\theta = f(\sigma s) -$$
$$- \Phi_1(s)\cdot f(\sigma s_1) - \Phi_2(s)\cdot f(\sigma s_2) - \dots - \Phi_n(s)\cdot f(\sigma s_n),$$

und durch ein analoges Verfahren auch die folgende

$$(\varrho_2) \qquad \mathfrak{F}(\sigma s) + \lambda \int \mathfrak{F}(\sigma\theta) f(\theta s)\, d\theta = f(\sigma s) - \\ - \Psi_1(\sigma) f(\sigma_1 s) - \Psi_2(\sigma) f(\sigma_2 s) - \cdots - \Psi_n(\sigma) f(\sigma_n s),$$

— Integralgleichungen, die eine große Ähnlichkeit mit (γ_1) und (γ_2) haben. Die Funktionen $\Phi_\varkappa(s)$ sind hier die oben angegebenen (o), sobald $\lambda = \lambda_0$ gesetzt wird. Analoges gilt von den $\Psi_\varkappa(\sigma)$.

Die allgemeine Form der Lösungen Φ der homogenen Integralgleichung (μ_1) ist jetzt leicht zu finden. Man multipliziere die ganze Gleichung (ϱ_1)*) mit $\Phi(\sigma)\, d\sigma$ und integriere. Links ergibt sich für das Integral ohne weiteres Null, man hat nur die Integrationsfolge umzukehren und die obige Gleichung (μ_1) für $\Phi(s)$ zu berücksichtigen. Rechts bekommt man aber durch Berücksichtigung derselben Gleichung einen Ausdruck, aus dem folgt

$$\Phi(s) = c_1 \Phi_1(s) + c_2 \Phi_2(s) + \cdots + c_n \Phi_n(s),$$

worin $c_1, c_2, \cdots c_n$ Konstanten sind, die die Werte $\Phi(s_1), \Phi(s_2), \cdots \Phi(s_n)$ haben. Dies zeigt die behauptete lineare Darstellbarkeit der Lösung $\Phi(s)$.

Man kann nunmehr auch leicht die Lösbarkeit der nichthomogenen Integralgleichungen, z. B.

$$(\nu) \qquad \varphi(s) + \lambda \int \varphi(\sigma) f(\sigma s)\, d\sigma = \psi(s)$$

für den Fall des Verschwindens von $D(\lambda)$ untersuchen.

Die Bedingungen für die Lösbarkeit der nichthomogenen Gleichung (ν) ergeben sich folgendermaßen. Man multipliziere die Gleichung (ν) mit einer Lösung $\Psi_\varkappa(s)$ und ds und integriere. Links ergibt sich, da die Bezeichnung der Integrationsvariabeln gleichgültig ist, wegen (μ_2) die Null. Rechts bekommt man $\int \psi(s)\, \Psi_\varkappa(s)\, ds$, also

$$\int \psi(s)\, \Psi_\varkappa(s) ds = 0, \quad \varkappa = 1, 2, \ldots n.$$

Dies sind die notwendigen Bedingungen zur Lösbarkeit. Man wird aber gleich bemerken, daß die Lösung nicht eindeutig bestimmt ist, da zu $\varphi(s)$ eine beliebige lineare Kombination der $\Phi_1(s), \Phi_2(s), \ldots \Phi_n(s)$ additiv hinzutreten kann. Man bekommt die Lösung $\varphi(s)$, wenn man die Integralgleichung (ν) mit der oben definierten Funktion $\mathfrak{F}(s\tau)$ mal ds multipliziert und integriert. Berücksichtigt man die Gleichung (ϱ) für $\mathfrak{F}(s, \sigma)$, so bekommt man nach leichter Reduktion

$$\varphi(s) = \psi(s) - \lambda \int \psi(\theta)\, \mathfrak{F}(\theta s) d\theta,$$

wobei eine lineare Kombination der $\Phi_1(s), \ldots \Phi_n(s)$ weggelassen werden konnte. In diesem Ausdruck haben wir also eine Lösung, falls es eine solche überhaupt gibt. Daß dies der Fall ist, zeigt der Nachweis, daß gerade der erhaltene Ausdruck wirklich eine Lösung bedeutet. Zu dem Zwecke setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung für $\varphi(s)$

$$\varphi(s) - \psi(s) + \lambda \int \varphi(\sigma) f(\sigma s)\, d\sigma = 0$$

---

*) worin man sich $\lambda = \lambda_0$ zu denken hat.

ein. Man bekommt für die linke Seite nach einer Umkehrung der Integrationsfolge

$$-\lambda\int\psi(\theta)\{\mathfrak{F}(\theta s)-f(\theta s)+\lambda\int\mathfrak{F}(\theta\sigma)f(\sigma s)\,d\sigma\}\,d\theta.$$

Die Klammergröße hierin ist nach (ϱ_2) ein linearer Ausdruck von $\Psi_1(\theta)$, $\Psi_2(\theta), \ldots \Psi_n(\theta)$.

Die Bedingungen $\int\psi(\theta)\,\Psi_\varkappa(\theta)\,d\theta=0$, *wobei* $\varkappa=1,2,\ldots n$, *sind also zur Lösbarkeit von* (ν) *auch hinreichend.*

Damit sind die angeführten Sätze Fredholms vollständig bewiesen.

§ 17.

In der Potentialtheorie, wie bei den meisten Aufgaben der theoretischen Physik, tritt die Integralgleichung in einer Form auf, daß die Lösung von

$$F(\sigma s)+\lambda\int F(\sigma\theta)f(\theta s)\,d\theta=f(\sigma s)$$

als Funktion des Parameters λ aufgefaßt, nur einfache Pole besitzt. Es läßt sich in diesem Falle der Funktion $F(\sigma s)$ in der Umgebung eines Poles λ_0 die Gestalt geben

$$(\sigma)\qquad F(\sigma s)=\frac{P(\sigma s)}{\lambda-\lambda_0}+\cdots,$$

wo der weggelassene Teil eine reguläre Potenzreihe nach $\lambda-\lambda_0$ ist, $P(\sigma s)$ aber von λ nicht abhängt.

Setzt man $F(\sigma s)$ in die Integralgleichungen (γ), denen es genügt, ein, so bekommt man für $P(\sigma s)$ die beiden Integralgleichungen

$$(\tau)\qquad \begin{aligned} P(\sigma s)+\lambda_0\int P(\sigma\theta)f(\theta s)\,d\theta&=0\\ P(\sigma s)+\lambda_0\int f(\sigma\theta)\,P(\theta s)\,d\theta&=0\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt aber, daß $P(\sigma s)$ als Funktion von s der homogenen Integralgleichung

$$(\mu_1)\qquad \Phi(s)+\lambda_0\int\Phi(\theta)f(\theta s)\,d\theta=0$$

und als Funktion von σ der adjungierten

$$(\mu_2)\qquad \Psi(\sigma)+\lambda_0\int f(\sigma\theta)\,\Psi(\theta)\,d\theta=0$$

genügt. Die Funktion $P(\sigma s)$ ist somit eine lineare Kombination der Funktionen $\Phi_\varkappa(s)$. Wir können folglich setzen

$$(v)\qquad P(\sigma s)=\Psi_1(\sigma)\Phi_1(s)+\Psi_2(\sigma)\Phi_2(s)+\cdots+\Psi_n(\sigma)\,\Phi_n(s),$$

wobei die Koeffizienten der $\Phi_\varkappa(s)$ Funktionen von σ sind, die wie die zweite der Integralgleichungen (τ) zeigt, der Integralgleichung (μ_2) genügen. Wir können sie deshalb geradezu anstelle der früheren $\Psi_\varkappa(\sigma)$ setzen, da sie, wie wir sehen werden, linear unabhängig sind. Um dies zu erkennen, multiplizieren wir (γ) mit $-\lambda_0\Psi(s)ds$ und bekommen durch Integration, wegen (μ_2)