umfaßt alle Punkte, die außerhalb der Kurve liegen, über welche integriert wird, mit Ausnahme des unendlich fernen Punktes für V falls sich $m = \int d\mu_s$ nicht Null ergibt. Diese Tatsache ist der Differentiierbarkeit unter dem Integralzeichen entnehmbar. Nun müssen aber die Verhältnisse erörtert werden, die eintreten, wenn der Punkt p unbegrenzt gegen einen Punkt σ der Integrationskurve näherrückt.

Zunächst gilt hier der folgende Satz A_1:

Ist das Potential der einfachen Schicht (12a) *in jeder beliebigen Nähe eines Randpunktes unter einer angebbaren endlichen Grenze gelegen, so ist es auch stetig und geht durch die Berandung stetig hindurch.*

Diesem Satze könnte man die zum Teil schärfere Fassung geben, daß in gleichen Distanzen zu beiden Seiten eines Punktes s der Berandung auf einer durch s gehenden Geraden der Unterschied der Werte des Potentials um so kleiner wird, je näher man zur Kurve rückt. Nimmt man die Massenverteilung differentiierbar an, d. h. existiert der Differentialquotient $\frac{d\mu_s}{ds} = \mu'(s)$, so besteht die Endlichkeit und Stetigkeit des Potentials V am Rande sicher. Die Annahme der Existenz der Dichtigkeit $\mu'(s)$ ist aber ganz und gar nicht notwendig, vielmehr besteht die Endlichkeit und Stetigkeit von

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{sp}} \cdot d\mu_s$$

am Rande unter so geringen Voraussetzungen über die Massenverteilung $d\mu_s$, daß sie wohl selten nicht erfüllt sein werden. So genügt z. B. zur Stetigkeit von $V(\sigma)$ schon die Annahme, daß das Integral $\int_\sigma^s |d\mu|$ auf dem Kurvenstücke $\widehat{s\sigma}$ nicht die Größenordnung von $r_{s\sigma}^{\varrho}$ überschreitet, wo ϱ irgendeine positive Zahl $\neq 0$ ist. Dies ist eine Bedingung, die außerordentlich weniger bindet, als die Proportionalität von $d\mu_s$ mit dem Kurvenelemente ds. Die allgemeinere Form des Potentials V der einfachen Schicht bringt keine Erschwerung der Verhältnisse mit sich, bedeutet aber eine große Erweiterung des Umfanges durch solche Potentiale darstellbarer Funktionen.

sehr grosse Voraussetzg!?

In eine nähere Erörterung der Größenverhältnisse von V am Rande glaube ich hier um so weniger eingehen zu müssen, als uns in der Richtung keine Schwierigkeiten bevorstehen und in den Fällen der Anwendung jedesmal diese Fragen unschwer zu beantworten sind.

Eine ähnliche Betrachtung muß auch über das Potential

$$W(p) = \int \nu(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arc\,tg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds$$

angestellt werden.

Die Stetigkeit von W und aller seiner Ableitungen außerhalb der Integrationskurve ist eine Folge der Differentiierbarkeit unter dem Integral-

---

eine Funktion nehmen, die den Kurvenpunkten umkehrbar eindeutig zugeordnet ist, wenn die Differentiierbarkeit von $\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ vorhanden ist.

zeichen. Während aber vom Potential V für die nur in Betracht kommenden Fälle die Stetigkeit auf die Werte am Rande und beim Durchgang durch die Randkurve ausgedehnt werden konnte, ist hier die Stetigkeit nicht mehr vorhanden. Es muß in diesem Falle darauf geachtet werden, von welcher Seite man sich einem Kurvenpunkte σ nähert. Bei unbegrenzter Annäherung an den Randpunkt σ wird W auf jeder Seite gegen einen in der Regel anderen Wert hinstreben. Jener Wert, der auf der linken Seite der Integrationsrichtung am Randpunkte σ liegt, soll mit $W(\sigma^+)$ bezeichnet werden, der Grenzwert auf der rechten Seite mit $W(\sigma^-)$, so daß gleichsam mit σ^+ und σ^- der linksseitige und der rechtsseitige Randpunkt am Kurvenpunkte σ sind. Hier gilt dann der Satz A_2.

Das Potential $W(p)$ der Doppelschicht erleidet in einem Punkte σ der Randkurve, wo die Belegung $\nu(\sigma)$ stetig ist, Stetigkeitssprünge, die durch folgende Gleichungen gegeben sind

$$W(\sigma^+) - W(\sigma^-) = 2\pi \cdot \nu(\sigma)$$

$$(\mathrm{A}_2) \qquad W(\sigma^+) + W(\sigma^-) = 2\int \nu(s)\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}\cdot ds,$$

dabei werden mit $W(\sigma^+)$ und $W(\sigma^-)$ die Grenzwerte von $W(p)$ auf der linken und rechten Seite am Kurvenpunkte σ bezeichnet.

Die zweite der vorstehenden Gleichungen kann man nach der von uns eingeführten Bezeichnung auch in der Form

$$W(\sigma^+) + W(\sigma^-) = 2\pi\int \nu(s) h(s,\sigma)\,ds$$

schreiben, da wir ja

$$h(s,\sigma) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

gesetzt haben.

Der Beweis dieses Satzes ist bereits klassisch geworden. Man schreibe zum Beweise das Potential W in der Form

$$W(p) = \int \nu(\sigma)\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{y - y_s}{x - x_s}\cdot ds + \int [\nu(s) - \nu(\sigma)]\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{y_s - y}{x_s - x}\cdot ds.$$

Das erste dieser beiden Integrale ergibt sich, da $\nu(\sigma)$ herausgehoben werden kann, nach dem Satze (15) gleich $2\pi\nu(\sigma)$, $\pi\nu(\sigma)$, 0, je nachdem der Punkt p auf der linken Seite, auf der Randkurve, oder auf der rechten Seite des Randpunktes σ liegt, wobei die Annäherung an σ beliebig fortschreiten kann. Für das zweite Integral d. h.

$$\int [\nu(s) - \nu(\sigma)]\frac{d}{ds}\operatorname{arc\,tg}\frac{y_s - y}{x_s - x}\cdot ds$$

bekommt man aber die Stetigkeit, wenn der Punkt p im Randpunkte σ durch die Kurve hindurchgeht, wenn nur $\nu(s)$ im Randpunkte σ stetig ist. Diese Tatsache ist sogar gar nicht abhängig von irgendeiner Voraussetzung über die Existenz der Normalen. Man kann wegen der Stetigkeit von $\nu(s)$ in der Nähe von σ das letzte Integral durch Integration per partes in die Gestalt bringen

$$[\nu(s) - \nu(\sigma)] \operatorname{arc\,tg} \frac{y_s - y}{x_s - x} - \int \operatorname{arc\,tg} \frac{x_s - x}{y_s - y} \cdot d\nu_s$$

und kann die Änderung dieses Ausdruckes beim Durchgang von (xy) durch den Randpunkt σ untersuchen. Man wird leicht die obige Behauptung bestätigt finden. Es ergibt sich also ganz allgemein

$$(16) \qquad W(\sigma^+) + W(\sigma^-) = 2\pi\nu(\sigma) + 2\int [\nu(s) - \nu(\sigma)]\, d \operatorname{arc\,tg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma},$$

was man bei Punkten σ mit einer Normale wieder infolge des Satzes (15) in der Form der zweiten Gleichung (A_2) schreiben kann. Dadurch ist der behauptete Satz A_2 vollständig bewiesen, er gilt aber sogar ohne Voraussetzung über das Vorhandensein von Normalen, wenn die zweite der Gleichungen (A_2) durch (16) gedeutet wird, was aber bei unseren Untersuchungen wegen der Voraussetzung gewisser Regularität der Begrenzung nicht erforderlich ist.

§ 11.

Die Strömung der Potentiale V und W.

Die bisherigen einschlägigen Arbeiten über Potentialtheorie haben der Untersuchung der Randwerte von V und W eine solche über ihre Ableitungen am Rande, insbesondere in der Normalenrichtung, folgen lassen. Nach meiner bereits oben betonten Ansicht muß aber viel weniger das Ziel der Untersuchung jenes sein, das Verhalten der Ableitungen am Rande zu ergründen, als denselben überhaupt zu entraten. Es war ja bereits bisher hinreichend bekannt, daß das Potential W bestimmte normale Ableitungen am Rande im allgemeinen nicht mehr besitzt, nicht zu reden von den ersten Ableitungen im allgemeinen. Für das Potential V der einfachen Schicht haben sich bisher Ableitungen in der normalen Richtung ergeben, jedoch mit verschiedenen Werten auf jeder Seite der Randkurve. Man wußte ferner längst, daß jedes in einer geschlossenen Kurve reguläre Potential mit stetigen Randwerten als ein Potential der Doppelschicht über die Berandung darstellbar ist, daß also Potentiale mit stetigen Randwerten im allgemeinen keine normalen Ableitungen am Rande besitzen. Da nun aber für ein Potential der einfachen Schicht V normale Ableitungen sich ergaben, so konnte man folgern, daß ein reguläres am Rande stetiges Potential durch die Form eines Potentials der einfachen Schicht im allgemeinen nicht darstellbar ist. Woran liegt nun die soweit geringere Leistungsfähigkeit des Potentials V gegenüber W. Der Grund ist in der zu speziellen Wahl für die Form des Potentials V gelegen. Dies war auch die Veranlassung, daß in dieser Arbeit für V die Form

$$V = \int \log \frac{1}{r_{sp}} \cdot d\mu_s$$

gewählt wurde und nicht die übliche $\int \log \frac{1}{r_{sp}} \cdot \mu'(s) ds$. Jetzt besitzt in der Tat das Potential V eine ähnliche Allgemeinheit, wie das Potential W, es zeigt sich aber, daß auch beim Potential V, wie bei W von normalen Ableitungen nicht mehr die Rede sein kann. Ich habe in einem vorangehendem Paragraph für die normalen Ableitungen einen Ersatz gegeben, nämlich den Begriff des Stromes. Für diesen Begriff lassen sich nun wirklich sowohl bei V als W Bestimmungen aufstellen. Insbesondere einfach liegen in dieser Hinsicht die Verhältnisse beim logarithmischen Potential, wo wie bereits gezeigt, durch den Unterschied der Werte des konjugierten Potentials in zwei Kurvenpunkten genau der Wert der Strömung auf dem Kurvenstücke zwischen diesen Punkten gegeben ist.

Bezeichnet man das zu $V(p) = -\int \log r_{ps} \cdot d\mu_s$ konjugierte Potential mit $\overline{V}(p)$, so bekommt man

$$\overline{V}(p) = -\int \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot d\mu_s.$$

Um ein Maß für die Strömung des Potentials zu finden, hat man also nur die Randwerte des konjugierten Potentials $\overline{V}(p)$ zu suchen, wobei es auf eine additive Konstante natürlich nicht ankommt. Da das Integral $\overline{V}$ nicht eindeutig ist, so wollen wir für den Anfangspunkt der Integration einen Punkt σ_0 festsetzen. Wir zählen jetzt die Masse von diesem Punkte, setzen also

$$\mu(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} d\mu_s$$

für die Masse auf dem Kurvenbogen $\overline{\sigma_0 \sigma}$. Um die Randwerte von $\overline{V}$ zu finden, integrieren wir per partes

$$-\int_{\sigma_0}^{\sigma_0} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot d\mu_s = \Big| -\mu(s) \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \Big|_{\sigma_0}^{\sigma_0} + \int_{\sigma_0} \mu(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds$$

wobei die Integration von σ_0 bis σ_0 die ganze Kurve durchläuft. Die Größe $\Big|_{\sigma_0}^{\sigma}$ hat, weil zu Anfang $\mu(\sigma_0) = 0$, am Schluß $\mu(\sigma_0) = m =$ die Gesamtmasse von V ist, den Wert $m\left(\operatorname{arctg} \frac{y_{\sigma_0} - y_\sigma}{x_{\sigma_0} - x_\sigma} + 2\pi\right)$, $m\left(\operatorname{arctg} \frac{y_{\sigma_0} - y_\sigma}{x_{\sigma_0} - x_\sigma} + \pi\right)$, $m \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y_{\sigma_0}}{x_\sigma - x_{\sigma_0}}$ je nachdem σ auf dem inneren Rande des Randpunktes σ, liegt, der Randpunkt σ selbst oder der äußere Randpunkt σ ist. Das zweite Integral der letzten Gleichung ist ein Potential der Doppelschicht, so daß wir sein Verhalten am Rande kennen. Läßt man eine additive Konstante weg, so erscheint

$$\begin{aligned} &\overline{V}(\sigma^+) - \overline{V}(\sigma^-) = 2\pi\mu(\sigma) \\ (17) \qquad &\overline{V}(\sigma^+) + \overline{V}(\sigma^-) = -2\int \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} \cdot d\mu_s. \end{aligned}$$

Damit ist die Bestimmung der Strömung geschehen. Wenn die Masse des Potentials V differentiierbar ist, d. h. besteht $\frac{d\mu_s}{ds} = \mu'(s)$, so ergeben sich für das Potential $V(p)$ der Form

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot \mu'(s) ds$$

aus den erhaltenen Gleichungen leicht normale Ableitungen von V, da $\frac{\partial V}{\partial n} = -\frac{\partial \overline{V}}{\partial s}$. Es erscheint

$$\text{(17a)}\qquad \begin{aligned} &\frac{dV}{dn}(\sigma^-) - \frac{dV}{dn}(\sigma^+) = 2\pi\mu'(\sigma) \\ &\frac{dV}{dn}(\sigma^-) + \frac{dV}{dn}(\sigma^+) = 2\int \mu'(s)\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{y_s - x_\sigma}\cdot ds, \end{aligned}$$

da in (17), wie leicht zu ersehen, unter dem Integralzeichen nach σ differentiiert werden darf. Dies sind die bekannten Gleichungen für die normalen Ableitungen eines Potentials V der einfachen Schicht, die wir hier in einfachster Weise herleiten konnten. Die zweite der Gleichungen können wir durch Einführung der Funktion $h(s\sigma) = \frac{d}{ds}\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ in der Form schreiben

$$\frac{dV}{dn}(\sigma^-) + \frac{dV}{dn}(\sigma^+) = 2\pi\int h(\sigma s)\mu'(s)ds.$$

Man beachte wohl unter dem Integrale die Reihenfolge der beiden Punkte s, σ in $h(\sigma s)$ und bemerke, daß in der zweiten Formel des Satzes A_2 S. 22 die Reihenfolge von s und σ eine andere ist. Wir haben jetzt eine Auswahl zwischen den Formeln (17) und (17a). Die zweiten, d. h. (17a) wird man nur dann anwenden können, wenn das Potential V die spezielle Form hat, also eine Massendichtigkeit $\mu'(s)$ besitzt und wenn überdies noch eine Normale vorhanden ist. Das erste System, d. h. (17), ist allgemein gültig.

Für das Potential $W(p) = \int \nu(s)\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y - y_s}{x - x_s}\cdot ds$ bekommen wir das konjugierte Potential $\overline{W}(p)$ in der Form

$$\overline{W}(p) = -\int \nu(s)\frac{d}{ds}\log r_{ps}\cdot ds$$

und haben den Randwert zu bestimmen. Es werde vorausgesetzt, daß die Belegung eine stetige Funktion ist. Man bekommt dann durch Integration per partes, weil der ausintegrierte Teil zwischen den Grenzen genommen $= 0$ ist,

$$\overline{W}(p) = \int \log r_{ps}\cdot d\nu(s).$$

Dies ist ganz die Form eines Potentials der einfachen Schicht mit dem Massenelement $-d\nu(s)$. Um die Strömung zu finden, hat man die Randwerte des Potentials $\overline{W}$ zu bestimmen. Sollte es beim Potential $W(p)$ der Doppelschicht normale Ableitungen geben, so würden diese als Ableitungen von $\overline{W}(s)$ nach dem Kurvenbogen sich ergeben und zwar wären sie auf beiden Seiten der Kurve gleich. Würde es nötig sein, so wäre es nicht schwer, solche hinreichende Bedingungen für die Stetigkeit von $\nu(s)$ zu finden, daß $\overline{W}$ längs des Randes differentiierbar wäre. Wir vertreten aber den Standpunkt, daß die Kenntnis der normalen Ableitungen von W überflüssig sei.

Normale Ableitungen eines Potentials der doppelten Schicht existieren also im allgemeinen nicht, wie regulär die Begrenzug auch sei. Man hatte bisher bei regulärer Begrenzung für die normalen Ableitungen folgenden Ersatz: Nimmt man in der Normale im Kurvenpunkte σ in gleichen

Massenelemente: $-d\nu(s)$ $d\mu(s)$

Distanzen von σ beiderseits der Kurve zwei Punkte σ^+ und σ^- an, so ist die Differenz $\frac{\partial W}{\partial n}(\sigma^+) - \frac{\partial W}{\partial n}(\sigma^-)$ um so näher an Null, je näher die Punkte σ^+ und σ^- am Kurvenpunkte σ liegen. Man konnte daraus schon die gleichzeitige Nichtexistenz oder Existenz beider normalen Ableitungen folgern und im letzten Falle ihre Gleichheit. Ein Beweis dieses Theorems wurde meines Wissens zuerst von A. Tauber (Monatsh. f. Math. u. Phys. Bd. 7) und ungefähr gleichzeitig von Liapounoff (Liouville J. 1896) gegeben. Wir haben im vorstehenden für die normalen Ableitungen von W einen Ersatz von viel größerer Allgemeinheit erhalten, werden aber in der Folge nicht einmal von diesem Ergebnisse Gebrauch machen.

Etwas weniger einfach liegen die Verhältnisse beim Newtonschen Potential. Daß aber auch hier ein prinzipielles Hindernis nicht besteht, erkennt man, wenn man die bekannten zu (17a) analogen Formeln

$$\frac{dV}{dn}(\sigma^-) - \frac{dV}{dn}(\sigma^+) = 4\pi\mu'(\sigma)$$

$$\frac{dV}{dn}(\sigma^-) + \frac{dV}{dn}(\sigma^+) = 2\int \mu'(s)\frac{d}{dn_\sigma}\left(\frac{1}{r_{s\sigma}}\right)\cdot ds$$

betrachtet. Durch Multiplikation mit $d\sigma$ und Integration über ein Flächenstück bekommt man zwei Gleichungen für die Strömung auf diesem Flächenstück, wobei $\mu'(\sigma)d\sigma$ durch $d\mu(\sigma)$ d. h. die Masse im Flächenelement zu ersetzen ist. Man beachte, daß $\int \frac{d}{dn_\sigma}\left(\frac{1}{r_{s\sigma}}\right)d\sigma$ die scheinbare Größe des Flächenstückes vom Punkte s aus ist. Die Formeln haben sodann eine große Ähnlichkeit mit (17).

§ 12.

Die Stetigkeit der Randfunktionen $\int v(s)\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}\cdot ds$.

Diese Randfunktion ergab sich als Mittelwert beiderseitiger Randwerte eines Potentials der Doppelschicht mit der Belegung $v(s)$. Das Integral ändert nun seinen Wert stetig bei einer stetigen Lageänderung des Randpunktes σ, von dem es abhängt. Man kann für das Integral auch schreiben

$$\pi v(\sigma) + \int [v(s) - v(\sigma)]\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}\cdot ds,$$

woraus für Punkte, wo $v(\sigma)$ selbst stetig ist, die Stetigkeit sehr leicht zu erkennen ist. Man kann aber auch hier vorteilhaft von der Integration per partes, von Kurvenstück zu Kurvenstück, auf denen $v(s)$ stetig ist, Gebrauch machen und findet für ein Kurvenstück $\widehat{s_1 s_2}$

$$\left| v(s)\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}\right|_{s=s_1}^{s=s_2} - \int_{s_1}^{s_2}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}\cdot dv(s).$$

Das Integral hier erweist sich unmittelbar als stetig, da

$$\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} - \operatorname{arctg}\frac{y_s - y_{\sigma_1}}{x_s - x_{\sigma_1}}$$

um so kleiner wird, je näher σ_1 an σ heranrückt, wenn nur s in einer Entfernung von σ gehalten wird, die größerer Ordnung ist, als die Distanz $\overline{\sigma\sigma_1}$. Erstreckt man aber die Integration noch über die unmittelbare Umgebung von σ, so ergibt sich das Integral wieder nach Belieben klein, wenn nur die Punkte $\sigma\sigma_1\sigma_1$ hinreichend sich nähern und dann das kleine Kurvenstück in der Umgebung von σ ebenfalls hinreichend verkleinert wird. Da die Differenz $\operatorname{arctg}\frac{y_s-y_{\sigma_1}}{x_s-x_{\sigma_1}}-\operatorname{arctg}\frac{y_s-y_\sigma}{x_s-x_\sigma}$ endlich bleibt, $\int d\nu(s)$ aber mit Abnahme des Kurvenstückes, über das integriert wird, gleichzeitig zu Null abnimmt, ist die Stetigkeit des Integrals vorhanden. Der Wert von $\left|\nu(s)\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma-y_s}{x_\sigma-x_s}\right|_{s_1}^{s_2}$ ist aber von Kurvenstück zu Kurvenstück zwischen Sprüngen der Stetigkeit zu untersuchen. Die Stetigkeit ist für jedes einzelne Kurvenstück $\overline{s_1s_2}$ vorhanden, da z. B. $\operatorname{arctg}\frac{y_{s_1}-y_\sigma}{x_{s_1}-x_\sigma}-\operatorname{arctg}\frac{y_{s_1}-y_{\sigma_1}}{x_{s_1}-x_{\sigma_1}}$ bei Gegeneinanderrücken von σ und σ_1 beliebig gegen Null abnimmt. Die Stetigkeit des obigen Integrales ist also vorhanden und zwar selbst dort, wo die Funktion $\nu(s)$ einen Sprung erleidet. Man könnte die Stetigkeit selbst für Punkte, wo die Normale nicht existiert oder nicht eindeutig ist, nachweisen, in welchem Falle man aber die Funktion $\nu(s)$ stetig voraussetzen muß und das Integral in der Form anzunehmen hat, wie die zur Gleichung (16) S. 23 gemachten Bemerkungen ergeben. Diese Fälle kommen aber in unserer Anwendung nicht vor, weshalb darauf nicht näher eingegangen werden soll.

§ 13.

Das Symmetriegesetz der Randfunktion $\int \log r_{s\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma-y_\theta}{x_\sigma-x_\theta}\,d\theta$.

Die Funktion $\log r_{pq}$ ist in den beiden Punkten p und q symmetrisch, woraus sich Symmetrieeigenschaften gewisser anderer Funktionen ergeben. Da diese Beziehungen die Quelle ähnlicher Eigenschaften wichtiger Funktionen sind, sollen sie hier abgeleitet werden.

Nimmt man in der Formel

$$\int\left(U\frac{dV}{dn}-V\frac{dU}{dn}\right)ds=0$$

für U und V die beiden Funktionen

$$U(p)=\log r_{pq_1},$$
$$V(p)=\log r_{pq_2},$$

worin q_1 und q_2 zwei feste Punkte bedeuten, so sind $U(p)$ und $V(p)$ im Inneren einer geschlossenen Kurve regulär, wenn beide Punkte q_1 und q_2 außerhalb der Kurve liegen und die Formel ist anwendbar. Liegen jedoch die Punkte q_1 und q_2 beide im Inneren der Kurve, so sind $U(p)$ und $V(p)$ im Außengebiete regulär, wenn man dasselbe durch Schlagen eines großen Kreises zunächst endlich macht und die Integration auch über diesen großen Kreis erstreckt.

Es ist aber leicht einzusehen, daß das Integral über diesen großen Kreis mit wachsendem Radius beliebig gegen Null abnimmt, so daß es genügt, die Integration nur über die gegebene Randkurve zu erstrecken.

Da

$$\frac{d}{dn}\log r_{\sigma q} = -\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y_q}{x_\sigma - x_q}$$

ist, so folgt unter Einführung der Bezeichnung

$$(18)\qquad g(q_1 q_2) = \frac{1}{\pi}\int \log r_{q_1\sigma}\cdot\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y_{q_2}}{x_\sigma - x_{q_2}}\cdot d\sigma$$

das Symmetriegesetz

$$g(q_1 q_2) = g(q_2 q_1)$$

sobald nur die Punkte q_1 und q_2 entweder beide im Inneren oder beide im Äußeren der Kurve liegen.

Um das Symmetriegesetz auch auf Randpunkte ausdehnen zu können, was unser eigentliches Ziel ist, so bezeichnen wir mit s^+ den inneren Randpunkt am Kurvenpunkte s, mit s^- den äußeren Randpunkt.

Nun bemerken wir, daß die Funktion $g(q_1 q_2)$, wie die Definition (18) zeigt, in Hinsicht auf den ersten Punkt q_1 ein Potential der einfachen Schicht, also am Rande stetig ist und daß er ferner als Funktion des zweiten Punktes q_2 ein Potential der Doppelschicht ist. Aus dem obigen Symmetriesatze folgt schon $g(s^+, \theta^+) = g(\theta^+, s^+)$, wofür man wegen der Stetigkeit der Potentiale V am Rande auch schreiben kann

$$g(s, \theta^+) = g(\theta, s^+).$$

Analog gilt auch

$$g(s, \theta^-) = g(\theta, s^-).$$

Daraus ergibt sich durch Addition und Division durch 2

$$g(s, \theta) = g(\theta, s),$$

weil der Mittelwert eines Potentiales W zu beiden Seiten eines Randpunktes wie der Satz A_2, S. 22, angibt, genau gleich ist dem Wert des Integrales für W für den Randpunkt.

Bei Anwendung der Bezeichnung

$$h(s, \sigma) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

können wir den Satz aussprechen:

Die Randfunktion

$$g(s, \sigma) = \int \log r_{s\theta}\cdot h(\theta, \sigma)\, d\theta$$

erfüllt das Symmetriegesetz

$$(19)\qquad g(s, \sigma) = g(\sigma, s).$$

Man erkennt ohne weiteres, daß zur Gültigkeit dieses Gesetzes die Annahme einer einzigen Randkurve ganz unwesentlich ist.