bestimmten Grenzwert strebt, der dann mit $\overline{U}(\sigma) = -\int\limits_p^\sigma \frac{\partial U}{\partial n}\, d\sigma$ zu bezeichnen wäre. Ganz analoges gilt vom Einrücken des zweiten Punktes gegen einen Randpunkt σ_0. So erklärt sich die Bedeutung des Integrales

$$\overline{U}(\sigma) = -\int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{d\,U}{d\,n}\, d\,s$$

zwischen zwei Randpunkten selbst dann, wenn es längs der Berandung nicht zu bilden ist wegen Nichtexistenz von $\frac{d\,U}{d\,n}$. Wenn das Integral $\overline{U}(\sigma)$ bei stetiger Verlegung des σ eine stetige Änderung erfährt, so wird infinitesimalen Stücken $d\sigma$ der Berandung auch eine infinitesimale Änderung von $\overline{U}(\sigma)$ entsprechen, die wir mit $d\overline{U}(\sigma)$ bezeichnen können. Der Zusammenhang mit den normalen Ableitungen ist jetzt leicht herzustellen. Ist nämlich die Größe $\overline{U}(\sigma)$ längs des Randes differentiierbar, d. h. besteht $\frac{d\,\overline{U}(\sigma)}{d\sigma}$, so ist dieser Differentialquotient gleich $-\frac{d\,U}{d\,n}$. Wir haben also im neuen Begriff tatsächlich einen Ersatz für die normalen Ableitungen, aber von einer weitgrößeren Leistungsfähigkeit. Es kann nämlich $d\overline{U}(\sigma)$ einen guten Sinn haben, ohne daß ein solcher für $\frac{d\,\overline{U}(\sigma)}{d\sigma}$ besteht *Es handelt sich hier um eine Verallgemeinerung, wie es die Erweiterung differentiierbarer Funktionen auf die stetigen ist.* Die größere Tragweite des neuen Begriffes ist nicht schwer zu erkennen, denn jetzt ist man unabhängig sowohl von der Existenz der Normale als auch der Ableitungen am Rande.*) Man wird also z. B. eine Verallgemeinerung der Aufgabe, normale Ableitungen eines Potentials am Rande vorzugeben, darin haben, jedem Element $d\sigma$ des Randes den ihm entsprechenden Betrag $d\overline{U}(\sigma)$ vorzuschreiben.

Dieser neue Begriff hat in der physikalischen Anwendung bei der Strömung der Elektrizität bereits den Namen „*Stärke des Stromes*“ der durch dieses Stück der Berandung fließt. Ich will also in der Folge, mangels einer von der Anwendung freien Benennung die Bezeichnung „*Strom*“ oder „*Strömung*“ auf dem Randstücke gebrauchen.

Beim logarithmischen Potential gibt es für die „Strömung“ ein sehr einfaches Maß. *Sie ist die Änderung des konjugierten Potentiales zwischen den Endpunkten des Kurvenstückes.* Bezeichnet man nämlich die zu U konjugierte Potentialfunktion mit $\overline{U}$, so bestehen die Differentialgleichungen

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \overline{U}}{\partial x},$$

die für orthogonale Koordinatenänderung unempfindlich sind, so daß also auch die Relationen

$$\frac{\partial U}{\partial s} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial n}, \quad \frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\partial \overline{U}}{\partial s}$$

---

*) Selbst die Annahme der Rektifizierbarkeit der Randkurve ist unwesentlich.

$\Delta u = 0$ $\qquad$ $\Delta u = 0$

$u_n = g$ $\rightsquigarrow$ $d\sigma \mapsto d\bar{u}(\sigma)$

in Greenschen Formeln: $\frac{\partial u}{\partial n} ds$ ersetzen durch $-d\bar{u}(s)$

$\rightsquigarrow \oint u\, d\bar{u}(s) \geq 0$

gelten. Daraus folgt aber

$$-\int_{\sigma_0}^{\sigma} \frac{\partial U}{\partial n} ds = \overline{U}(\sigma) - \overline{U}(\sigma_0).$$

Die frühere Bezeichnung für $\overline{U}(\sigma)$ stimmt also wohl mit der jetzigen überein, da es bei $\overline{U}$ auf eine additive konstante $\overline{U}(\sigma_0)$ nicht ankommt. Die größere Leistungsfähigkeit tritt hier sehr klar zu Tage, da das konjugierte Potential einen durchaus stetigen Verlauf haben kann ohne irgendwo eine Ableitung nach dem Kurvenbogen zu besitzen. In den Greenschen Formeln wird man jetzt $\frac{\partial U}{\partial n} ds$ durch $-d\overline{U}$ zu ersetzen haben. Der Satz (8) lautet dann dahin, daß das Integral $\int U d\overline{U}$ positiv ist bei der Erstreckung über die Berandung des Regularitätsgebietes.

§ 6.

Das Verhalten im Unendlichen.

Die Formel (10) für die Darstellung von Potentialen im Regularitätsgebiete zeigt uns, daß jedes Potential durch zwei Potentiale vom speziellen Bau sich ausdrücken läßt. Diese beiden Potentiale haben die Form

$$(12)\qquad \begin{aligned} V(p) &= \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu_s \\ W(p) &= \int \nu(s) \cdot \frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot ds \end{aligned}$$

und werden *Potentiale der einfachen Schicht bzw. der doppelten Schicht* genannt. Bei unendlichen Feldern tritt nach den Erörterungen auf Seite 8 nur eine additive Konstante noch hinzu. Aus dem Verhalten dieser speziellen Potentiale V und W im Unendlichen kann man das Verhalten jedes Potentials viel genauer erkennen, als es bloß aus der Definition möglich ist.

Es mögen die Koordinaten des Punktes p mit (xy), jene von s mit x_s, y_s bezeichnet werden; ferner setzen wir

$$R^2 = x^2 + y^2, \quad r_s^2 = x_s^2 + y_s^2.$$

Wenn man nun in

$$r_{sp}^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 = R^2 - 2(xx_s + yy_s) + r_s^2$$

die Substitution

$$\xi = \frac{x}{R^2}, \quad \eta = \frac{y}{R^2}$$

einführt, so kann man r_{ps}^2 in der Form schreiben

$$r_{ps}^2 = R^2 \cdot \{1 - 2(\xi x_s + \eta y_s) + (\xi^2 + \eta^2) r_s^2\}$$

und man bekommt für $\log \frac{1}{r_{sp}}$ eine Entwicklung für große R

$$\log \frac{1}{r_{ps}} = \log \frac{1}{R} + (\xi x_s + \eta y_s) + (0)_2,$$

wo $(0)_2$ eine reguläre Potenzreihe von $\xi\eta$ ist, die erst mit den quadratischen Gliedern beginnt. Wird diese Entwicklung, die für alle hinreichend großen x, y, d. h. hinreichend kleinen ξ, η konvergiert, in die beiden Potentiale (12) eingeführt, so bekommt man für alle großen $x^2 + y^2$ Darstellungen der Gestalt

$$V(p) = m \log \frac{1}{R} + A\xi + B\eta + \cdots$$
$$W(p) = C\xi + D\eta + \cdots,$$

woraus man sofort erkennt, daß m die Gesamtmasse des Potentials $V(p)$ ist, während $W(p)$ im Unendlichen regulär ist. Zu einem beliebigen im Unendlichen regulären Potential tritt dann nach Seite 8 noch eine additive Konstante C hinzu, während die Masse $m = 0$ anzunehmen ist. Es hat also ein solches Potential im Unendlichen die Entwicklung

$$U(p) = C + a\frac{x}{R^2} + b \cdot \frac{y}{R^2} + \cdots$$

aus der sich ergibt, daß die Grenzwerte

$$\lim_{R=\infty} R^2 \frac{\partial U}{\partial x}, \quad \lim_{R=\infty} R^2 \frac{\partial U}{\partial y}$$

endlich sind. Dies präzisiert das Abnehmen der ersten Ableitungen weit schärfer als es in der Definitionsgleichung der Fall war.

Man kann aber über das Potential U als Funktion von ξ, η betrachtet noch mehr aussagen. Die Funktion U genügt nämlich der Laplaceschen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0,$$

so daß es als Potential in den Koordinaten ξ, η aufgefaßt werden kann. Man erkennt diese Tatsache indem man beachtet, daß die spezielle Funktion $\log r_{sp}$ der Differentialgleichung $\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = 0$ genügt, wenn in $\log r_{sp}$ die Koordinaten x, y durch ξ, η ausgedrückt werden. Man kann aber auch im Differentialausdruck $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ die neuen Variablen $\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$ einführen und bekommt die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)(x^2 + y^2)^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2},$$

woraus wieder die Behauptung folgt.

Durch die Substitution $\xi = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2 + y^2}$ geht das Unendlichferne des xy Koordinatensystems in die unmittelbare Umgebung des Nullpunktes im $\xi\eta$ Koordinatensystem über. Ein im Unendlichen von xy reguläres Potential geht in ein im Nullpunkte $\xi = 0$, $\eta = 0$ reguläres Potential in den neuen Koordinaten über.

Ähnlich sind die Verhältnisse beim Newtonschen Potential. Man hat die Substitution

$$= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \ \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \ \zeta = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}, \ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = R = \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}}$$

und findet entweder, durch Einsetzen in r_{sp}, daß die Funktion RU als ein Potential in den Koordinaten ξ, η, ζ sich auffassen läßt, oder aus der allgemein gültigen Differentialrelation:

$$R^5\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\}=\frac{\partial^2 RU}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 RU}{\partial \eta^2}+\frac{\partial^2 RU}{\partial \zeta^2}.$$

Es geht also auch hier das Unendlichferne von xyz in die Umgebung des Nullpunktes von $\xi\eta\zeta$ über, so daß sich für große Entfernungen für ein Potential U von der Masse m eine Darstellung ergibt:

$$U = C + m\cdot\frac{1}{R} + a\frac{x}{R^3} + b\frac{y}{R^3} + c\frac{z}{R^3} + \cdots,$$

so daß $R(U-C)$ ein reguläres Potential von $\xi\eta\zeta$ ist, das im Nullpunkt von $\xi\eta\zeta$ den Wert m hat.

Die vorliegende Betrachtung zeigt deutlich, inwiefern das unendlich ferne Gebiet den Charakter eines Punktes trägt. Der folgende Paragraph wird erkennen lassen, warum es zweckmäßig war gerade das Verschwinden der Masse als Kennzeichen der Regularität im Unendlichen festzusetzen.

§ 7.

Die Lage der extremen Werte.

Die Gleichung (10) gestattet in einfacher Weise den Wert eines Potentials $U(p)$ im Mittelpunkt eines Kreises durch die Peripheriewerte des Potentials darzustellen. Da die Gleichung $\int \frac{\partial U}{\partial n}\, ds = 0$ besteht und für den Kreis $\frac{\partial}{\partial n}\log\frac{1}{r} = -\frac{\partial}{\partial r}\lg\frac{1}{r} = \frac{1}{r}$ gilt, so ergibt sich der Mittelpunktswert U_0.

$$U_0 = \frac{1}{2r\pi}\int U(s)\cdot ds.$$

Darin ist der Satz von Gauß enthalten:

Der Wert eines Potentials im Mittelpunkt eines Kreises ist ein Mittelwert der Peripheriewerte.

Wenn ein Potential nicht konstant ist, so muß es nach diesem Satze auf dem Kreise sowohl größere als auch kleinere Werte als im Mittelpunkte geben. Aus diesem Umstande läßt sich aber folgern, daß es im Regularitätsgebiete einen Extremalwert nirgends geben kann, daß diese also auf der Berandung liegen. Wenn es im Endlichen im Regularitätsgebiete irgendwo in einem Punkte einen Extremalwert geben würde, so könnten die Werte auf jedem hinreichend kleinen Kreise weder größer noch kleiner sein, müßten also mit dem Mittelpunktwert übereinstimmen. Schritt für Schritt würde sich die Konstanz des Potentials ergeben.

Es ist nun wichtig zu bemerken, daß bei unserer Definition Seite 4 des Regulärseins im Unendlichen, auch der unendlichferne Punkt keine Ausnahme macht, d. h. daß im Unendlichen reguläre Potentiale auch im Unendlichen keinen Maximal- oder Minimalwert haben können. Sei nämlich U ein solches Potential mit dem Wert C im Unendlichen. Die Substitution

$\xi = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2+y^2}$ führt $U - C$ in ein in der Umgebung des Nullpunktes von ξ, η reguläres Potential, das für $\xi = \eta = 0$ verschwindet. Es liegen demnach auf einem hinreichend kleinen Kreise um den Nullpunkt $\xi = \eta = 0$ sowohl positive als negative Werte von $U - C$. Daraus folgt aber wieder, daß C kein Extremalwert ist.*) Wir können allgemein sagen:

Im Regularitätsgebiet hat das Potential nirgends einen extremen Wert.

Unsere Definition des regulären Potentials vermeidet also jede Ausnahme im unendlich fernen Punkte.

Man kann den Beweis des obigen Satzes auch nach einem andern Verfahren führen, das zu einem noch allgemeineren Satze hinleitet. Nehmen wir an, das Potential U wäre im Unendlichen regulär und hätte dort einen kleinsten Wert, den wir $= 0$ annehmen können. Sei nun a eine hinreichend kleine positive Konstante, so sind wir wegen der Stetigkeit von U und des Verschwindens im Unendlichen sicher, daß in jeder Richtung vom Ursprung einmal die Potentialwerte V nicht mehr über den Betrag a hinausgehen. Es wird eine den Ursprung einfach umschließende analytische Kurve

$$U(p) = a$$

(Niveaulinie) geben, welche die Potentialwerte, die $< a$ sind, von jenen trennt, welche $\geqq a$ sind. Die Tangente in einem Punkte $x_0 y_0$ dieser Linie lautet:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_0 \cdot (y - y_0) = 0,$$

und könnte nur dann unbestimmt sein, wenn $\frac{\partial U}{\partial x}$ und $\frac{\partial U}{\partial y}$ gleichzeitig verschwinden, was übrigens, wie leicht zu zeigen ist, nur in isolierten Punkten eintreten kann, wobei dann auch die Ableitung $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ anzunehmen wäre. Betrachtet man das Integral $\int \frac{\partial U}{\partial n} ds$ über die Niveaulinie, so kann es nicht Null sein, weil $\frac{\partial U}{\partial n}$, wo es nicht verschwindet, überall das gleiche Zeichen hat. Bei regulären Potentialen, wo $\int \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0$ ist, kann es also im Unendlichen keinen Extremalwert geben. Aus dem Bisherigen kann man folgern

Hat ein Potential auf der Berandung des Regularitätsgebietes überall denselben konstanten Wert, so ist es allenthalben gleich dieser Konstanten.

*) Analog wird der Beweis beim Newtonschen Potential geführt. Hat U die Masse Null und den Wert C im Unendlichen, so ist $R(U - C)$ im Unendlichen Null. Wie oben gezeigt, wird durch die Substitution $\xi = \frac{x}{R^2}$, $\eta = \frac{y}{R^2}$, $\zeta = \frac{z}{R^2}$ die Funktion $R(U - C)$ zu einem Potential von ξ, η, ζ, welches im Nullpunkte $\xi = \eta = \zeta = 0$ regulär ist und den Wert Null annimmt. Bei kleinen Werten von ξ, η, ζ also großen Werten von x, y, z hat demnach $R(U - C)$ sowohl positive als negative Werte und dasselbe gilt wegen des positiven Zeichens des R auch von $U - C$, so daß auch hier C kein Extremum ist. Das Verschwinden der Masse ist aber wesentlich; in der Tat hat schon das Potential $\frac{1}{r}$ im Unendlichen ein Minimum.

Man kann sogar den allgemeineren Satz behaupten

Besteht die Berandung des Regularitätsgebietes aus mehreren getrennten Stücken, auf denen das Potential je einen konstanten Wert hat, so ist dieser konstante Wert überall derselbe, das Potential also selbst konstant, wenn die Masse auf jedem geschlossenen Stück der Berandung einzeln den Betrag Null hat.

Zum Beweise wird man, wie oben, eine Niveaulinie konstruieren, welche nur jene Stücke der Berandung einschließt, auf denen das Potential den größten Wert hat, indem man als den Wert auf der Niveaulinie eine Zahl wählt, die vom Maximalwert des Potentials nur wenig abweicht. Wie früher würde man finden, daß das Integral $\int \frac{\partial U}{\partial n} ds$ über die Niveaulinie von Null verschieden ist, im Widerspruch gegen die Voraussetzung. Dieser Widerspruch löst sich nur durch die Annahme desselben konstanten Wertes auf der ganzen Berandung.

Die Potentiale der einfachen und der doppelten Schicht.

§ 8.

Die Definition der Potentiale V und W.

Die Gleichung (10), vermöge der jedes Potential U durch zwei spezielle Arten von Potentialen ausdrückbar ist, zeigt die Notwendigkeit einer näheren Betrachtung der Eigenschaften dieser beiden Potentiale. Das Potential der Form

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu_s \tag{12a}$$

wird *„das Potential der einfachen Schicht“* oder Belegung genannt, das Potential

$$W(p) = \int \nu(s) \cdot \frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}} \cdot ds \tag{12b}$$

führt aus physikalischen Gründen den Namen *„Potential der Doppelschicht“* oder Doppelbelegung. *Der Gleichmäßigkeit wegen sollen für diese Potentiale die Buchstaben V bzw. W zur Verwendung kommen,* so daß z. B. $w(p)$ ein Potential der Doppelschicht ist, bei $U(p)$ aber die Darstellungsart nicht vorgeschrieben ist.

Bisher war es üblich für das Potential $V(p)$ die Form

$$\int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot \mu'(s) \cdot ds$$

→ siehe auch S. 90

vorauszusetzen, wobei dann $\mu'(s)$ die *Massendichtigkeit* der Belegung genannt wurde. *Eine solche Annahme erweist sich aber als eine derart folgenschwere Einschränkung, daß dadurch dem Potentiale $V(p)$ der größte Teil seiner Leistungsfähigkeit hinweg genommen wird.* Für tiefergehende Untersuchungen erweist sich das Potential V nur in der Form (12a) verwendbar.*) Die infinitesimale Größe $d\mu_s$ kann man das *Massenelement* nennen, von Massendichtigkeit wird man aber nur dann sprechen können, wenn der Differentialquotient $\frac{d\mu_s}{ds} = \mu'(s)$ besteht.

Die Randfunktion $\nu(s)$ im Potential W soll kurz „*Belegung*" des Potentials W heißen.**)

Für die Funktion $\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}}$, die im Potential der Doppelschicht auftritt, gibt es eine sehr einfache Auslegung. Man kann dafür offenbar auch schreiben

$$\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}} = \frac{\cos(n_s, r_{sp})}{r_{sp}},$$

wobei unter (n_s, r_{sp}) der Winkel zwischen der Differentiationsrichtung n_s und dem Radiusvektor r_{sp} zu verstehen ist. Da aber die Richtung n_s senkrecht steht zum Element ds, so zeigt eine einfache Überlegung, daß $\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sd}} \cdot ds$ die scheinbare Größe des Elementes ds vom Punkte p aus ist. Daraus folgt aber, daß das Integral

$$\int \left(\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}} \right) ds$$

erstreckt zwischen zwei Punkten A und B die Winkelgröße ist, unter der die Strecke AB von p aus erscheint (mit einer naheliegenden Modifikation bei etwaigen mehrfachen scheinbaren Überdeckungen). Daraus folgt

Das Integral

$$\int \left(\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}} \right) \cdot ds$$

erstreckt über eine geschlossene Kurve ist gleich 2π *oder* 0, *je nachdem der Punkt* p *im Innern oder außerhalb der Kurve liegt.*

Man erkennt leicht, daß der Satz auch dann gelten würde, wenn die Berandung aus mehreren sich ausschließenden getrennten Kurven besteht, die jede für sich geschlossen ist; ja, noch mehr, bei einer geeigneten Definition des Innengebietes und Außengebietes, die sehr auf der Hand liegt, gilt der Satz auch, wenn die Kurven einander nicht sämtlich ausschließen, sobald sie sich nur nicht durchschneiden.

Der Funktion $\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}}$ läßt sich hier eine andere Form geben, wenn man das konjugierte Potential zu $\log \frac{1}{r_{sp}}$ zu Hilfe nimmt. Setzt man

---

*) Integrale der Form $\int f(s)\, d\mu_s$ werden als *Stieltjes*-sche bezeichnet (Stieltjes, Rech. sur les fract. cont., Ann. Toul. T. 8, 1894). Sie sind infolge ihrer Leistungsfähigkeit in den letzten Jahren insbesondere in der Theorie der Integralgleichungen wichtig geworden.

**) Die sehr gebräuchliche Benennung „Moment" für die Funktion $\nu(s)$ entspricht nicht der in der Vektorenrechnung üblichen Terminologie, wo das Moment eine Richtung hat, vielmehr ist $\nu(s)$ nur der Tensor des Momentes einer Doppelquelle.

$z - z_s = (x - x_s) + i(y - y_s)$, so ist $\log r_{sp}$ der Realteil von $\log(z - z_s)$, der imaginäre Teil ist $i \cdot \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}$. Man hat also die Gleichheit:

$$\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}} = \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}$$ $z - z_s = r_{sp} \cdot e^{i \operatorname{arctg} \frac{y-y_s}{x-x_s}}$

und kann auch schreiben

$$\left(\frac{d}{dn_s} \log \frac{1}{r_{sp}}\right) ds = d\left(\operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}\right),$$

wobei unter der infinitesimalen Größe rechts in dieser Gleichung die Winkeländerung zu verstehen ist, die aus einer kleinen Verlegung des Punktes s hervorgeht. Die obige Deutung als scheinbare Größe des Kurvenbogens tritt hier unmittelbar hervor.

Das Potential W der Doppelschicht kann man nunmehr auch in der Form

(13) $$W(p) = \int \nu(s)\, d \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}$$

schreiben, eine Darstellung, welche selbst dann einen Sinn beibehält, wenn der Differentialquotient $\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}$ nicht mehr vorhanden ist, also auch in Randpunkten mit zwei Tangenten und selbst dort, wo es keine Tangente an die Kurve gibt.

Da in der Folge das Vorhandensein der Tangente an die Randkurve vorausgesetzt wird, hat $\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}$ überall einen Sinn. Wir führen folgende Bezeichnung ein

(14) $$h(s,p) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s}.$$

Die Funktion $h(s,p)$ hat selbst dann einen bestimmten Sinn, wenn der Punkt p zu einem Randpunkte σ wird, in welchem Falle man die Funktion h ohne weiteres mit $h(s,\sigma)$ bezeichnen wird. Aus dem obigen Satze, Seite 18, folgt mit einer einfachen Ergänzung auf die Randpunkte der Satz

Erstreckt man das Integral über eine geschlossene Kurve, so ist

(15)
$$\begin{aligned} &\int h(s,p)\,ds = 2, && \text{wenn } p \text{ innerhalb der Kurve} \\ &\int h(s,\sigma)\,ds = 1, && \quad\text{"}\quad \sigma \text{ auf} \quad\text{"}\quad\text{"} \\ &\int h(s,p)\,ds = 0, && \quad\text{"}\quad p \text{ außerhalb} \quad\text{"}\quad\text{"} \end{aligned}$$

liegt, über welche integriert wird.

Die Randfunktion

(14) $$h(s,\sigma) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$$

wird bei uns eine zentrale Stellung einnehmen. Man bemerkt, daß $h(s\sigma)$ die Ableitung einer in s und σ symmetrischen Funktion ist, ein Umstand, der in unserer Untersuchung zu wichtigen Ergebnissen führen wird, wofür es beim Newtonschen Potential kein Gegenstück gibt.

§ 9.

Die Masse von V und W und das Verhalten im Unendlichen.

Es wurde bereits im § 6 das Verhalten der Potentiale V und W im Unendlichen erörtert. Setzt man

$$m = \int d\mu_s,$$

indem man die Integration über die ganze Berandung erstreckt, so hat bei allen großen Distanzen R das Potential V eine Entwicklung der Form

$$V = m \log \frac{1}{R} + A \frac{x}{R^2} + B \frac{y}{R^2} + \cdots,$$

analog hat man für das Potential W der Doppelschicht eine Reihenentwicklung

$$W = a \frac{x}{R^2} + b \frac{y}{R^2} + \cdots.$$

Die weggelassenen Glieder sind von höherer Ordnung in $\frac{x}{R^2}$ und $\frac{y}{R^2}$. Aus dieser Betrachtung folgt, daß das Potential V im Unendlichen im allgemeinen nicht regulär ist, während das Potential W stets im Unendlichen regulär ist und dort den Wert Null hat. Wenn in den Potentialen V und W die Integration sich über mehrere für sich geschlossene Kurven erstreckt, so kann man die Potentiale als Summen von Potentialen darstellen, die aus der Integration über je eine Kurve entstehen. Aus der Tatsache, daß das Integral $\int \frac{\partial U}{\partial n} ds$ über jede Kurve, die ein für das Potential U reguläres Flächenstück einschließt, sich Null ergibt, folgert man unschwer, daß die Masse von V auf einem geschlossenen Kurvenzuge, über den das Integral $V = \int \log \frac{1}{r_{sp}} \cdot d\mu_s$ zu verstehen ist, gleich ist jenem Anteil am Integral $\int d\mu_s$, welcher aus der Integration über dieses geschlossene Kurvenstück sich ergibt. Unsere Definition der Masse stimmt also überein mit der klassischen, wonach geradezu $\int d\mu_s$ als Masse bezeichnet wird. Eine analoge Erwägung über das Potential W zeigt, *daß die Masse des Potentials der Doppelschicht auf jedem einzelnen der geschlossenen Kurvenzüge der Berandung Null ist.* Diese ausgezeichnete Eigenschaft der Potentiale W tritt bei den Randwertaufgaben der Potentialtheorie, sobald es sich um mehrfach zusammenhängende Gebiete handelt, sehr stark hervor, ist aber bisher zu wenig betont worden.

§ 10.

Die Randwerte der Potentiale V und W.

Das Regularitätsgebiet der Potentiale

$$(12)\quad \begin{aligned} &\text{(a)} \qquad V(p) = \int \log \frac{1}{r_{sp}} \cdot d\mu_s, \\ &\text{(b)} \qquad W(p) = \int \nu(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds^{*}) \end{aligned}$$

*) Man sieht aus der Form des Potentials $W(p)$, daß es nicht nötig ist, unter ds ein Kurvenelement zu verstehen, man könnte vielmehr statt des Kurvenbogens als s irgend