so konvergiert die Folge von Funktionen

$$h(\sigma s),\ h_1(\sigma s),\ h_2(\sigma s),\ h_3(\sigma s),\ \ldots$$

gegen einen von s nicht abhängigen Wert $\mathfrak{m}'(\sigma)$, die natürliche Belegung. Bildet man aber analog aus irgendeiner wenigstens in Stücken stetigen Funktion $f(s)$ die Neumannsche Folge

$$f_1(s),\ f_2(s),\ f_3(s),\ \ldots,$$

so konvergiert diese gegen eine Konstante N (Neumannsche Konvergenzkonstante). Die letzte Folge ergibt sich aber aus der ersten durch gliedweise Multiplikation mit $f(\sigma)d\sigma$ und Integration, d. h. es ist

$$f_\varkappa(s) = \int f(\sigma)h_\varkappa(\sigma s)d\sigma, \quad \text{wobei } h_0(\sigma s) = h(\sigma s)$$

$$N = \int f(\sigma)\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma.$$

Diese Art der Bestimmung von $f_\varkappa(s)$ erfordert nur eine erlaubte Vertauschung der Integrationsfolge.

Bekanntlich erhält man die Belegungen eines Potential W mit den Randwerten $f(s)$ durch die konvergenten Reihen

$$\pm [f(s) - N] - [f_1(s) - N] \pm [f_2(s) - N] - [f_3(s) - N] \pm \cdots,$$

so daß also sowohl die Reihe

(a) $$- [f_1(s) - N] - [f_3(s) - N] - [f_5(s) - N] - \cdots$$

als auch

(b) $$- [f_2(s) - N] - [f_4(s) - N] - [f_6(s) - N] - \cdots$$

konvergiert. Die erste dieser Reihen ergibt sich aus der analogen konvergenten Reihe

(c) $$[h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_2(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + [h_4(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + \cdots$$

durch Multiplikation mit $f(\sigma)d\sigma$ und Integration, die zweite durch Multiplikation mit $f_1(\sigma)d\sigma$ und Integration. Die Reihe (c) löst uns also das Problem sowohl für das Innengebiet als für das Außengebiet. Bezeichnet man mit $\mathfrak{K}(\sigma s)$ den Wert von (c), so ergibt sich der Wert von (a) in der Form $-\int f(\sigma)\mathfrak{K}(\sigma s)d\sigma$ und der von (b) durch $-\int f_1(\sigma)\mathfrak{K}(\sigma s)d\sigma$. Durch Addition und Subtraktion von (a) und (b) bekommt man aber bis auf das erste Glied $\pm [f(s) - N]$ bekanntlich die gesuchten Belegungen zweier Potentiale W, deren eines die Randwerte $f(s)$ am Innenrande, das andere am Außenrande bis auf die Neumannsche Konstante N darstellt. Der § 32 bringt eine andere Herleitung dieses Resultates. Die Funktion $\mathfrak{K}(\sigma s)$ ist beim Kreise gleich Null, hat aber auch bei der Ellipse einen sehr einfachen Wert.

Die vorliegende Art der Reduktion des Problems auf die Bestimmung einer einzigen Randfunktion gelingt gleichmäßig beim logarithmischen und dem Newtonschen Potential.

2.

Der § 33 gibt uns eine andere Lösung der Frage, die zwar nur im Falle des logarithmischen Potentiales besteht, dafür aber einen weit tieferen Einblick in die hier herrschenden Verhältnisse gewährt. Der Hauptsache nach handelt es sich hierbei um folgendes:

Die Randfunktion, die im Mittelpunkt der bisherigen Betrachtung steht, ist $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$, wofür die Reihe

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) = [h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - \lambda[h_1(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] + \lambda^2[h_2(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)] - \cdots$$

gilt, die über den Einheitskreis des λ hinaus konvergiert. Wie gesagt, entsprechen $\lambda = \pm 1$ den Problemen für das Innengebiet bezw. für das Außengebiet. Nun ist aber im Falle des logarithmischen Potentials $h(\sigma s)$ die Ableitung einer symmetrischen Funktion $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$, d. h. es ist

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}.$$

Es liegt nun die Frage nahe, wie die Funktion lautet, deren Ableitung nach σ die Funktion $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ ist. Zu diesem Zwecke hat man zu setzen $\mathfrak{m}(\sigma) = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(s) ds$, so daß also $d\mathfrak{m}(s)$ das Massenelement der natürlichen Verteilung, d. h. $\mathfrak{m}'(s)ds$ wird. Setzt man dann

$$\mathfrak{p}(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} - \mathfrak{m}(\sigma) - \mathfrak{m}(s),$$

so ist diese Funktion nicht nur symmetrisch, sondern auf der ganzen Berandung endlich und stetig und kehrt nach einem Umlauf irgendeines der Punkte σ, s um die Kurve zum Ausgangswert zurück, was bei $\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ nicht der Fall ist, denn diese Funktion nimmt, wie $\mathfrak{m}(\sigma)$, dabei um Eins zu. Die Ableitung von $\mathfrak{p}(\sigma s)$ nach σ ist $h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)$. Bildet man sich aus $\mathfrak{p}(\sigma s)$ die Neumannsche Funktionenfolge $\mathfrak{p}(\sigma s)$, $\mathfrak{p}_1(\sigma s)$, $\mathfrak{p}_2(\sigma s)$, ... so konvergiert sie, wie leicht zu zeigen, gegen einen sowohl von σ als von s unabhängigen also konstanten Wert, den man gleich Null annehmen kann, da bei der Bildung der Massenfunktion $\mathfrak{m}(\sigma) = \int\limits_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(\sigma) d\sigma$ der Ausgangspunkt σ_0 der Zählung noch willkürlich war. Nach dieser Normierung ist $\mathfrak{p}(\sigma s)$ vollkommen eindeutig festgelegt und die im selben Bereich, wie jene von $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$, konvergente Reihe

$$\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) = \mathfrak{p}(\sigma s) - \lambda \mathfrak{p}_1(\sigma s) + \lambda^2 \mathfrak{p}_2(\sigma s) - \cdots$$

gibt die Funktion, deren Ableitung nach σ gerade $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ ist, d. h. es ist

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) = \frac{d}{d\sigma} \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s).$$

Es sei bemerkt, daß die Funktion $\mathfrak{P}(\sigma s)$ durchaus endlich und stetig ist.

Die Symmetrie der Funktion $\mathfrak{p}(\sigma s)$ überträgt sich nun auf $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ in folgender merkwürdiger Form

$$\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s).$$

Die Herleitung dieses eigentümlichen Symmetriegesetzes ist eines der wichtigsten Ergebnisse dieser Schrift. Es folgt aus dem Gesetze für $\lambda = \pm 1$ sofort, daß wenn die Randfunktion $\mathfrak{P}(\sigma s)$ das Randwertproblem im Innengebiete löst, in ganz analoger Weise $\mathfrak{P}(s\sigma)$ die Lösung für das Außengebiet gibt. Wie einfach die beiden Lösungen sind, ergibt sich aus den Gleichungen (76) S. 84. Die Potentiale

$$U(p) = \frac{1}{\pi}\int f(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \pi\mathfrak{m}(\sigma) - \int \mathfrak{P}(\sigma\,\theta)\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}\,d\theta\right\}d\sigma$$

und

$$U(p) = -\frac{1}{\pi}\int f(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y}{x_\sigma - x} - \pi\mathfrak{m}(\sigma) + \int \mathfrak{P}(\theta\,\sigma)\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y}{x_\theta - x}\,d\theta\right\}d\sigma$$

haben die vorgeschriebenen Randwerte $f(s)$, das erste am Innenrande, das zweite am Außenrande. Diese Darstellung hat augenscheinlich auch die bereits früher betonte Form, von der speziellen Wahl des Parameters, der den Bogen mißt, unabhängig zu sein.

Das obige Symmetriegesetz $\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ sagt uns aber noch mehr aus. Aus ihm folgt, daß die singulären λ-Werte, welche ja einfache Pole von $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ sind (§ 24), symmetrisch in der reellen λ-Achse vom Nullpunkte aus liegen. Man kann diese Verhältnisse auf die sogenannten „Fundamentalfunktionen" Poincarés übertragen und kommt so zu bisher nicht bekannten Ergebnissen. Die Bestimmung der Funktionen $\mathfrak{p}(\sigma s)$ und $\mathfrak{P}(\sigma s)$ für die Ellipse findet sich im § 38, wo sich ergibt

$$\mathfrak{P}(\sigma s) + \mathfrak{P}(s\sigma) = \frac{1}{\pi i}\log\prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n-1}\cdot e^{-i(\sigma+s)}}{1 - q^{2n-1}\cdot e^{+i(\sigma+s)}},$$

$$\mathfrak{P}(\sigma s) - \mathfrak{P}(s\sigma) = \frac{1}{\pi i}\log\prod_1^\infty \frac{1 - q^{2n}\cdot e^{-i(s-\sigma)}}{1 - q^{2n}\cdot e^{+i(s-\sigma)}},$$

so daß für den Kreis $\mathfrak{P}(\sigma s) = 0$ ist.

3.

Der § 39 und 40 gibt eine gleichzeitige Lösung des Randwertproblemes für das Innen- und Außengebiet in der Form eines Potentials V der einfachen Schicht. Man bekommt so das einzige existierende Potential, welches im Unendlichen regulär ist und dort verschwindet, am Rande aber die vorgegebenen Werte $f(s)$ bis auf eine additive Konstante annimmt. Die Hinzufügung dieser Konstanten zu V gibt dann die genaue Lösung beider Probleme. Die Form der Lösung ist genug merkwürdig. Sie besteht im folgenden: Es gibt eine nur von der Form des Gebietes abhängige symmetrische Randfunktion $\Delta(s\sigma) = \Delta(\sigma s)$, die bei Annäherung der Randpunkte s und σ gegeneinander wie $\frac{1}{\pi^2}\log r_{s\sigma}$ unendlich wächst. Es seien dann die überall stetigen Randwerte $f(s)$ auf der Kurve gegeben Man bestimme die Funktion $\mu(s)$ aus

$$\mu(s) = \int \Delta(s\sigma) df(\sigma)$$

durch Integration über den Rand. Die Bedeutung dieses Integrals ist bei stetigem $f(s)$ leicht erkenntlich. Es braucht $f(\sigma)$ nicht differentiierbar zu sein, ist das aber der Fall, so kann man $df(\sigma) = f'(\sigma) d\sigma$ setzen. Das obige Integral für $\mu(s)$ gibt eine Funktion von s, die sich so verhält, wie der Randwert eines Potentials der einfachen Schicht mit dem Massenelement $df(\sigma)$ — es wird also $\mu(s)$ schon bei geringen Voraussetzungen über die Stetigkeit von $f(s)$ längs der Berandung stetig sein. Jetzt ist

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu(s)$$

jenes Potential der einfachen Schicht, welches die Randwerte $f(s)$ bis auf eine additive, nämlich die Neumannsche, Konstante hat. Aus diesem Paragraph erkennt man mit besonderer Deutlichkeit die weit größere Plastizität des Potential V in der verallgemeinerten Form. Damit $\mu(s)$ differentiierbar wird, das Potential V also schließlich die gewöhnliche Form bekommt, sind schon sehr starke Anforderungen an die Stetigkeit des $f(s)$ notwendig. Diese Darstellung wäre ohne vorherige Verallgemeinerung des Potentiales V der einfachen Schicht nicht erreichbar gewesen.

Die Bestimmung der Funktion $\Delta(s\sigma)$, welche also alles leistet, wird durch zwei Funktionen $\mathfrak{G}^+(s\sigma)$ und $\mathfrak{G}^-(s\sigma)$ vermittelt, die natürlich beide durch die obige Funktion $\mathfrak{P}(\sigma s)$ ausdrückbar sind. Die Funktionen $\mathfrak{G}(s\sigma)$ erfüllen, wie im § 42 gezeigt wird, das Symmetriegesetz $\mathfrak{G}(s\sigma) = \mathfrak{G}(\sigma s)$, welches sich ohne weiteres auf die Funktion $\Delta(s\sigma) = \Delta(\sigma s)$ überträgt. Im letzten § 43 wurde der Zusammenhang dieser Funktion $\mathfrak{G}(s\sigma)$ mit der sogenannten „charakteristischen Funktion“ von Fr. Neumann erörtert; dies führt auf das Strömungsproblem zurück.

In Anwendung der Funktion $\Delta(s\sigma)$ auf die Ellipse ergab sich das einfache Resultat

$$\Delta(s\sigma) = \frac{1}{2\pi^2} \log \sin\left(\frac{\sigma - s}{2}\right) \cdot \vartheta_1\left(\frac{\sigma - s}{2}\right) \cdot \vartheta\left(\frac{\sigma + s}{2}\right),$$

worin $\vartheta_1(x)$ und $\vartheta(x)$ zwei elliptische ϑ-Funktionen sind. Auf eine additive Konstante kommt es bei $\Delta(s\sigma)$ nicht an. In diesem Falle war es auch leicht die erhaltenen Resultate durch eine Verifikation zu bestätigen. [§ 41.]

Die letzte Darstellung würde sich wohl auch beim Newtonschen Potential durchführen lassen. Da aber gerade die Integration per partes, die den Resultaten einen solchen Grad der Einfachheit verleiht, dort nicht anwendbar ist, sind im Newtonschen Falle die Verhältnisse viel verwickelter. Ich habe sie bei Seite gelassen.

Ich hatte ursprünglich die Absicht noch einige den „Fundamentalfunktionen“ Poincarés gewidmete Paragraphe hinzuzufügen. Weil mir aber der Zusammenhang mit der sonstigen Anlage der Arbeit ein zu loser erschien, und ich die selbständige Bedeutung dieser Funktionen nicht genügend anzuerkennen vermag, so habe ich es unterlassen. Wenn ich aber doch z. B. in der Arbeit gelegentlich mehrfach zusammenhängende Bereiche ins Auge faßte, so geschah dies, weil dies durchaus keine Erschwerung der Verhältnisse mit sich brachte und sich diese Betrachtungen dem ganzen Plane der Untersuchung noch recht gut anpassen ließen.

Wenn die Resultate des III. Abschnittes im großen und ganzen auch den bisherigen Methoden der Potentialtheorie zugänglich waren, und die meisten Sätze, wenn auch beschwerlicher, doch abgeleitet werden konnten, so sind die Ergebnisse des IV. Abschnittes gänzlich neu, dies sowohl inhaltlich als methodisch. Von diesen Sätzen scheint mir insbesondere das Symmetriegesetz $\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s)$ noch manches Interessante zu bergen.

Der Einfachheit halber wurde die Berandung mit stetiger Normale und endlicher Krümmung angenommen. Man könnte sich in manchen Punkten von den Beschränkungen befreien ohne der Strenge Abbruch zu tun. Die theoretischen Grundlagen, so besonders die Eigenschaften der Potentiale V und W — der Schlüssel zu den weiteren Resultaten — lassen sich für äußerst allgemeine Fälle der Berandung strenge begründen. Ich habe trotzdem von einer Verallgemeinerung, die doch nur Spezialfälle erledigen würde, Abstand genommen, in der Hoffnung, daß es jemand wohl gelingen dürfte, durch eine einfache Überlegung die Konvergenzsätze zu verallgemeinern oder gar für alle Fälle, wo sie noch gelten, als richtig zu erweisen. Ich glaube sogar, daß z. B. die K. Neumannsche Reihenentwickelung selbst dann noch gültig ist, wenn man von der gegebenen Berandung die Existenz einer Normale nicht voraussetzt, also beiläufig physikalisch gesprochen, der Begrenzung eine unendlich feine Rauhigkeit gestattet. Die Bedeutung der Integrale V und W und ihre hier in Frage kommenden Eigenschaften bleiben ungehindert aufrecht erhalten. In der Erledigung der vorliegenden Frage sehe ich eines der wichtigsten Ziele der modernen Potentialtheorie.

Beendet den 18. November 1910.

Inhalt.

I. Abschnitt. Die Grundlagen der Potentialtheorie.

Seite

§ 1. Einleitung. Entstehung des Potentialbegriffes. Das Newtonsche und das Logarithmische Potential 1

§ 2. Definition des Potentials. Die Definition der Regularität im Unendlichen. Masse 3

§ 3. Die Greenschen Formeln für endliche Gebiete und ihre Erweiterung auf unendlich große Gebiete insbesondere für im Unendlichen reguläre Potentiale . 5

§ 4. Über eine Erweiterung der Gültigkeit der Greenschen Sätze insbesondere auf Berandungen mit stetiger Normale und endlicher Krümmung 9

§ 5. Der Begriff der Masse und der Begriff der „Strömung", als Ersatz für normale Ableitungen. Das konjugierte Potential 10

§ 6. Das Verhalten im Unendlichen. Die Rolle des Unendlichfernen als Punkt. Invarianz von Δ bei einer Transformation 13

§ 7. Die Lage der extremen Werte. Der unendlich ferne Punkt macht bei im Unendlichen regulären Potentialen keine Ausnahme 15

Die Potentiale der einfachen und der doppelten Schicht.

§ 8. Begriff der Potentiale V und W. Die verallgemeinerte Form des Potentials V der einfachen Schicht. Die Funktion $h(sp) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{ds}\operatorname{arctg}\frac{y_s - y}{x_s - x}$ und ihre Integraleigenschaft 17

§ 9. Die Masse von V und W und das Verhalten im Unendlichen 20

§ 10. Die Randwerte von V und W. Das Potential V ist stetig am Rande und beim Durchgang durch denselben. Unstetigkeit des W beim Durchgang. Sprung und Mittelwert von W. 20

§ 11. Die Strömung von V und W, als Ersatz für die normalen Ableitungen. Die Strömung von V ist auf beiden Rändern verschieden, die von W ist gleich . 23

§ 12. Die Stetigkeit der Randfunktion, die den Mittelwert der Randwerte von W darstellt 26

§ 13. Das Symmetriegesetz der Randfunktion $\int \log r_{s\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y_\theta - y_\sigma}{x_\theta - x_\sigma}\,d\theta$. . . 27

II. Abschnitt. Die Integralgleichung Fredholms.

§ 14. Reduktion der Integralgleichung auf die Lösung einer speziellen (Resolvente) 29

§ 15. Fredholms Reihenentwicklung für die Lösung der Resolvente 30

§ 16. Die singulären Parameter. Lösung homogener Integralgleichungen im singulären Fall. Anzahl der Lösungen. Die Lösbarkeit der nichthomogenen im singulären Fall 32

§ 17. Fall einfacher Pole der Lösung. Anzahl linear unabhängiger Lösungen der homogenen Integralgleichung und die Integraleigenschaften zwischen adjungierten Lösungen. 37

§ 18. Eine Reihenentwickelung für den Fredholmschen Nenner. 38

Erster Abschnitt.

Die Grundlagen der Potentialtheorie.

§ 1.

Einleitung.

Die Einführung des Potentialbegriffes in die Mathematik hat seinen Ursprung in einer Bemerkung Lagranges, wonach die Komponenten einer nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz erfolgenden Kraftäußerung als partielle Ableitungen einer einzigen Funktion in jener Richtung, nach der die Komponente zielt, sich darstellen lassen. Diese eine Funktion hat den Namen Potential erhalten.

Wird ein Punkt p mit den Koordinaten (x, y, z) und der Masse m von den Punkten $p_1, p_2 \ldots p_n$, deren Koordinaten der Reihe nach mit $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \ldots (x_n, y_n, z_n)$ und die Massen mit $m_1, m_2 \ldots m_n$ bezeichnet werden mögen, nach dem Newtonschen Gesetze angezogen, so lautet das Potential $V(p)$

$$V(p) = \frac{m_1}{r_{pp_1}} + \frac{m_2}{r_{pp_2}} + \ldots + \frac{m_n}{r_{pp_n}}, \tag{1}$$

wenn mit $r_{pp_\varkappa}$ die Entfernung zweier Punkte d. h.

$$r_{pp_\varkappa} = \sqrt{(x - x_\varkappa)^2 + (y - y_\varkappa)^2 + (z - z_\varkappa)^2}$$

bezeichnet wird. Die Kraftkomponenten X, Y, Z in den Richtungen der x-, y- und z-Achse nehmen die einfache Form an

$$X = -m\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -m\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -m\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Dasselbe Wirkungsgesetz wurde nicht nur bei der Bewegung materieller Massen, sondern auch in anderen Gebieten der Physik (Magnetismus, Elektrizität) vorgefunden. Es ergeben sich dabei in der Regel sogar solche Fälle, wo die wirkenden Massen nicht punktweise auftreten, sondern in ihrer Gesamtheit ganze Raumteile oder wirkende Flächen ausmachen. Es liegt nahe die Formel (1) diesem Falle anzupassen. Bezeichnet man mit $d\mu_s$ die Masse, die in einem Element ds um den Punkt s vorkommt, so wird man das Potential $V(p)$ durch

$$V(p) = \int \frac{d\mu_s}{r_{ps}} \tag{1'}$$

ersetzen und die Integration über den Raumteil oder Flächenstück erstrecken, wo die Massen liegen. Die Form der Kraftkomponenten bleibt umgeändert.

Die Darstellung der Kraftkomponenten durch das Potential hat eine sehr wesentliche Vereinfachung der Formeln nach sich gezogen, da nunmehr statt dreier von der Richtung abhängender Größen eine einzige skalare Funktion ausreicht; der Hauptteil der Bedeutung des Potentials für die Physik liegt aber in seinem innigen Zusammenhang mit der Energie, einem Begriff, der die ganze moderne Naturforschung beherrscht.

Die reziproke Distanz $\frac{1}{r_{pq}}$ der Punkte p und q genügt der sogenannten „Laplaceschen Differentialgleichung"

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

und zwar unabhängig von der Lage des Punktes q, der nur von $p = (x, y, z)$ verschieden sein muß. Diesem Umstande ist es zu verdanken, daß auch das Potential (1) oder (1′) dieselbe Gleichung befriedigt, wenn nur der Punkt p von den anziehenden Massen eine angebbare Entfernung hat. Dies folgt aus der Differentiierbarkeit unter dem Integralzeichen.

Die Laplacesche Differentialgleichung trifft man in fast allen Gebieten der Physik an, z. B. in der Wärmeleitungslehre, Hydrodynamik, Elastizitätstheorie, also in Gebieten, wo ein Zusammenhang mit Newtons Gravitationsgesetz nicht erkenntlich ist.

Behandelt man aber schon die Differentialgleichung

$$\text{(2a)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

so wird man wohl bestrebt sein, wenn nicht vorher, doch wenigstens gleichzeitig eine Theorie der Differentialgleichung

$$\text{(2b)} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

auszubauen. Analog, wie früher die reciproke Distanz, hat diese Differentialgleichung den Logarithmus der Distanz, d. h.

$$\log \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

zu einer Lösung. Dies begründet die Benennung „Logarithmisches Potential". Es haben denn auch die meisten Definitionen und Sätze vom Newtonschen Potential hier ihre Analoga. Die Verwandtschaft herrscht nicht nur in der Theorie, sondern vielfach auch in der physikalischen Anwendung. Das hervorragendste Interesse aber bietet die Differentialgleichung (2b) in der Funktionentheorie infolge des Umstandes, daß ihr sowohl der reelle als der imaginäre Bestandteil jeder analytischen Funktion von $x + yi$, die beiden zueinander konjugierten Funktionen, entsprechen und daß umgekehrt jede Lösung von (2b) als Realteil einer analytischen Funktion sich deuten läßt.

Wenn man also die Differentialgleichungen (2a) und (2b) beherrscht, so umfaßt man dem Gesagten gemäß auch die Theorie des Potentials in seiner ursprünglichen Bedeutung, solange nur die anziehenden Massen sich nicht bis zum Punkte xyz hin erstrecken. Die Erfahrung hat nun gezeigt, daß es zweckmäßig ist, bei der Definition des Potentialbegriffes geradezu die

„Laplacesche Differentialgleichung" (2a) und (2b) an die Spitze zu stellen. Die neue Definition wird jedenfalls nicht enger sein als die ursprüngliche, tatsächlich erweist sie sich in mancher Hinsicht als umfassender. (Siehe übrigens die Fußnote auf Seite 4.)

Nicht nur der Begriff, auch die Aufgaben der Potentialtheorie haben eine Erweiterung erfahren. Während ursprünglich das Potential durch gegebene Massenverteilung festgesetzt erscheint, ist dasselbe bei den meisten gerade schwierigeren Problemen durch andere Angaben eindeutig bestimmt. Ja noch mehr, wir werden die ursprüngliche Aufgabe geradezu als erledigt ansehen; sobald nämlich die Massenverteilung bekannt ist, ergibt sich das Potential durch irgendwelche Summationen oder Integrationen, — Operationen, die wir als ausführbar betrachten.

Die Analogie zwischen dem Newtonschen und dem logarithmischen Potential ist eine so weitgehende, daß es zweckmäßig ist, für beide Potentialarten eine gemeinsame Theorie aufzustellen. Da die Schwierigkeiten kaum in einem Falle prinzipiell größer sind, als im anderen, so wäre es überflüssig, alle Sätze für beide Teile durchzuführen. Wenn ich mich in der Folge bei den Entwicklungen, die für beide Potentialarten gelten, auf das logarithmische Potential beschränke, so geschieht dies nicht wegen einer Vereinfachung, sondern wegen der Einheitlichkeit der Darstellung. Ich werde nämlich mehrere wichtige und interessante Sätze angeben, die ihre Quelle gerade in dem Umstande haben, daß es zu jedem logarithmischen Potential ein konjugiertes gibt; solche Sätze haben beim Newtonschen Potential kein Analogon. Im allgemeinen aber wird man meist den analagen Satz und Beweis leicht herstellen können. Wo übrigens der Unterschied etwas größer zu sein scheint, werde ich durch einige Bemerkungen die Verbindung herstellen.

§ 2.
Definition der Potentialfunktionen.

Es wurde bereits in der Einleitung erwähnt, daß man bei der Definition des Potentials zweckmäßig von der Laplaceschen Differentialgleichung (2a) und (2b) ausgehen kann. Die Wichtigkeit dieser Differentialgleichungen macht es wünschenswert, eine abgekürzte Bezeichnung für die linken Seiten dieser Gleichungen zu besitzen. Es ist üblich, dafür das Zeichen $\triangle V$ zu wählen, so daß also

$$(3)\quad \begin{aligned} \triangle V &\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} && \text{beim logarithm. Potential,} \\ \triangle V &\equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} && \text{„ Newtonschen „} \end{aligned}$$

gesetzt wird. Für die Folge soll nun folgende Definition gelten:

Jede in einem Gebiete eindeutig definierte Funktion $U(p)$, welche der Differentialgleichung $\triangle U = 0$ genügt, heißt eine Potentialfunktion (Potential) dieses Gebietes. Der Bereich, in dem $U(p)$ samt den ersten Ableitungen endlich und stetig ist, wird ihr Regularitätsgebiet genannt.