Man merke wohl, daß zur Gültigkeit dieser Formeln die Voraussetzung der Differentiierbarkeit der Randwerte $f(s)$ nicht nötig ist, die Integrale haben ja auch eine Bedeutung bei stetigem $f(s)$. Es bedeutet $df(s)$ nur die Änderung von $f(s)$ auf dem Element ds. Jetzt haben wir ein Potential der einfachen Schicht

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} d\mu(s),$$

welches im Unendlichen regulär ist, für das also $\int d\mu(s) = 0$, zu bestimmen, dessen konjugiertes Potential $\overline{V}$ gleich ist dem Potential $\overline{U}$. Das zu V konjugierte Potential $\overline{V}(p)$ lautet

$$\overline{V}(p) = -\int \operatorname{arctg} \frac{y-y_s}{x-x_s} \cdot d\mu(s),$$

oder nach partieller Integration, wenn noch eine Konstante weggelassen wird,

$$\overline{V}(p) = \int \mu(\sigma) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y-y_\sigma}{x-x_\sigma} \cdot d\sigma.$$

Dieses Potential ist ein Potential der doppelten Schicht und hat als solches am Randpunkte s einen Sprung gemäß der Gleichung

$$\overline{V}(s^+) - \overline{V}(s^-) = 2\pi\mu(s).$$

Dieser Sprung muß dem Sprung $\overline{U}(s^+) - \overline{U}(s^-)$ gleichkommen. Dieser findet sich aber aus (82) leicht. Die beiden Darstellungen für $\overline{U}$ sind ja, wie der Ausdruck (81) für $\mathfrak{G}(p\sigma)$ zeigt, Potentiale der einfachen Schicht und als solche am Rande stetig, so daß man, um den Randwert in s zu finden, direkt $p = s$ einsetzen kann. Dann findet man aber für den Sprung $\overline{U}(s^+) - \overline{U}(s^-)$ die Größe

$$\overline{U}(s^+) - \overline{U}(s^-) = -\frac{1}{\pi}\int [\mathfrak{G}^+(s\sigma) + \mathfrak{G}^-(s\sigma)] df(\sigma).$$

Die verlangte Gleichheit der linken Seite in dieser Gleichung mit $2\pi\mu(s)$ gibt den Wert von $\mu(s)$

$$\mu(s) = -\frac{1}{2\pi^2}\int [\mathfrak{G}^+(s\sigma) + \mathfrak{G}^-(s\sigma)] df(\sigma).$$

Von den Funktionen $\mathfrak{G}^+(s\sigma)$ und $\mathfrak{G}^-(s\sigma)$ wird in der Folge noch das Symmetriegesetz $\mathfrak{G}(s\sigma) = \mathfrak{G}(\sigma s)$ bewiesen werden.

Schreiben wir die Randfunktionen $\mathfrak{G}^+(s\sigma)$ und $\mathfrak{G}^-(s\sigma)$ noch her:

$$(83)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{G}^+(s\sigma) &= -\log r_{s\sigma} - \int \log r_{s\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \mathfrak{P}(\sigma\theta) d\theta - \Gamma(s) \\ \mathfrak{G}^-(s\sigma) &= -\log r_{s\sigma} + \int \log r_{s\theta} \cdot \frac{d}{d\theta} \mathfrak{P}(\theta\sigma) d\theta - \Gamma(s), \end{aligned}$$

setzen ferner

$$(84)\qquad \Delta(s\sigma) = -\frac{1}{2\pi^2}[\mathfrak{G}^+(s\sigma) + \mathfrak{G}^-(s\sigma)].$$

Wegen der Symmetrie der beiden Funktionen $\mathfrak{G}(s\sigma)$ gilt

$$\Delta(s\sigma) = \Delta(\sigma s).$$

Wir können jetzt das Resultat im folgenden Satze angeben:

Ist $f(s)$ irgendeine gegebene, jedoch auf dem ganzen Rande stetige Funktion, dann bestimme man aus der Gleichung

$$\mu(s) = \int \varDelta(s\sigma) \cdot df(\sigma), \tag{85}$$

in der die Integration sich über die ganze Berandung erstreckt und worin $\varDelta(s\sigma)$ die durch (84) und (83) definierte in s und σ symmetrische Funktion ist, welche von $f(s)$ nicht abhängt, die Funktion $\mu(s)$, dann hat das Potential der einfachen Schicht

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu(s) \tag{86}$$

am Rande (sowohl am inneren als am äußeren), die Randwerte $f(s)$ bis auf eine additive Konstante, nämlich die Neumannsche Konvergenzkonstante. Das Potential $V(p)$ ist im Unendlichen regulär.

Daß der konstante Unterschied gerade die Neumannsche Konstante ist, kann man aus dem Umstande erschließen, daß $V(p)$ ein im Unendlichen reguläres und verschwindendes Potential ist, wie jenes Potential der Doppelschicht im Außengebiete, das die Randwerte auch nur bis auf einen konstanten Unterschied, die Neumannsche Konstante darstelllt. Beide Darstellungen müssen im Außengebiete nach dem zweiten Satze auf Seite 40 miteinander übereinstimmen.

Man beachte wohl dieses merkwürdige Resultat. Wir haben in $\varDelta(s\sigma)$ eine Randfunktion, die symmetrisch von zwei Kurvenpunkten $s\sigma$ abhängt und das Randwertproblem im Innen- und im Außengebiete mit einem Schlage löst. Die Lösung ist in der Tat in der Form eines Potentiales der einfachen Schicht gelungen, was aber niemals möglich gewesen wäre, wenn man die alte Definition des Potentiales $V(p)$ zugrunde gelegt hätte. Die Art der Entstehung von $\mu(s)$ aus $f(s)$ zeigt doch deutlich, daß von einer Differentiierbarkeit von $\mu(s)$ also von der Existenz normaler Ableitungen des V im allgemeinen nicht die Rede sein kann. Es kommt nur darauf an, daß $\mu(s)$ eine stetige Funktion des Randpunktes s ist, also dem Integrale (86) einen wohldefinierten Wert erteilt. Das Verschwinden der Masse von $V(p)$ $\left(\text{d. h.} \int d\mu(s) = 0\right)$ ist eine Folge der Stetigkeit von $\mu(s)$. Man könnte nun aber fragen, ob denn die Darstellung des $\mu(s)$

$$\mu(s) = \int \varDelta(s\sigma) df(\sigma)$$

zu einer stetigen Funktion führt. Dies beantwortet sich leicht durch ein Durchgehen der Herleitung in der Weise, daß die Stetigkeit wirklich besteht, sobald nur

$$\int \log \frac{1}{r_{s\sigma}} \cdot df(s)$$

eine stetige Funktion von σ ist. (Siehe die Bedeutung der $\mathfrak{G}(s\sigma)$ in den Gleichungen (81) oder (83).) Dieses letzte Integral ist aber der Randwert eines Potentials der einfachen Schicht mit dem Massenelement $df(s)$. Wie bereits beim Potential der einfachen Schicht auf S. 21 hervorgehoben wurde, sind die zur Stetigkeit von V nötigen Anforderungen an die Stetigkeit der Funktion $f(s)$ äußerst geringe.

§ 41.
Beispiel: Ellipse.

Die im vorigen Paragraphen aufgestellte Funktion $\varDelta(s\sigma)$ soll nun für die Ellipse berechnet werden. Es handelt sich zunächst um die Bestimmung der Funktionen $\mathfrak{G}^+(s\sigma)$ und $\mathfrak{G}^-(s\sigma)$, die durch die Gleichungen (83) definiert sind.

Auf Seite 72 fanden wir

$$\log r_{s\sigma} = \log(A+B)\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| - \sum_1^\infty \frac{q^n}{n}\cos(s+\sigma)$$

und auf Seite 89

$$\mathfrak{P}(\sigma\theta) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\sin n(\theta+\sigma) + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})}\sin n(\theta-\sigma).$$

Die Integrale $\int \log r_{s\theta}\frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\sigma\theta)d\theta$ und $\int \log r_{s\theta}\frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\theta\sigma)d\theta$ sind zu bilden. Man berücksichtige die für alle von Null verschiedenen $s-\theta$ richtige Entwicklung

$$\log\left|2\sin\frac{s-\theta}{2}\right| = -\sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos n(s-\theta),$$

so daß man unter dem Integral setzen kann

$$-\log r_{s\theta} = -\lg\frac{A+B}{2} + \sum_1^\infty \frac{1}{n}\cos n(s-\theta) + \sum_1^\infty \frac{q^n}{n}\cos n(s+\theta).$$

Die Ausführung der Integration führt auf die Reihen*)

$$-\int \log r_{s\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\sigma\theta)d\theta = 2\sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos n(s-\sigma) + \sum_1^\infty \frac{q^n(1+q^{2n})}{n(1-q^{2n})}\cos n(s+\sigma)$$

$$+\int \log r_{s\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\theta\sigma)d\theta = -\sum_1^\infty \frac{q^n}{n}\cos n(s+\sigma).$$

Addiert man dazu $-\log r_{s\sigma} - \Gamma$, so bekommt man**)

$$\mathfrak{G}^+(s\sigma) = -\log 2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| + 2\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})}\cos n(s-\sigma) + 2\sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos n(s+\sigma)$$

$$\mathfrak{G}^-(s\sigma) = -\log 2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|.$$

Bei Einführung folgender zwei elliptischen ϑ-Funktionen

$$\vartheta(x) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \cdots$$

$$\vartheta_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\cdot\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cdot\sin 5x - \cdots$$

---

*) Man erkennt leicht, daß das Unendlichwerden für $s=\sigma$ die Integration nicht stört.

**) Das Leiterpotential $\Gamma(p)$ hat hier den Randwert $-\log\frac{A+B}{2}$, siehe § 30.

schreiben sich die $\mathfrak{G}^+(s\sigma)$ und $\mathfrak{G}^-(s\sigma)$ einfacher

$$\mathfrak{G}^+(s\sigma) = -\log\left|\vartheta_1\frac{s-\sigma}{2}\right|\cdot\vartheta\left(\frac{s+\sigma}{2}\right) + \text{const.}$$

$$\mathfrak{G}^-(s\sigma) = -\log 2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|.$$

Auf eine additive Konstante kommt es bei der Bestimmung von $\Delta(s\sigma)$ nicht an.

Man bekommt demnach für $\Delta(s\sigma)$ den Ausdruck

$$\Delta(s\sigma) = \frac{1}{2\pi^2}\log\sin\left(\frac{s-\sigma}{2}\right)\cdot\vartheta_1\left(\frac{s-\sigma}{2}\right)\cdot\vartheta\left(\frac{s+\sigma}{2}\right).$$

In dieser Form, aus der die Symmetrie klar hervortritt, ist das Resultat wohl als ein sehr einfaches zu bezeichnen. In Reihenform hätte man für $\Delta(s\sigma)$ den Ausdruck

$$\Delta(s\sigma) = \frac{1}{\pi^2}\left\{\log 2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| - \sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})}\cos n(s-\sigma) - \sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos n(s+\sigma)\right\}$$

oder wenn man die Reihe für $\log 2\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|$ berücksichtigt

$$\Delta(s\sigma) = -\frac{1}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty \frac{1}{n(1-q^{2n})}\cos n(s-\sigma) + \sum_1^\infty \frac{q^n}{n(1-q^{2n})}\cos n(s+\sigma)\right\}$$

bzw.

$$\Delta(s\sigma) = -\frac{1}{\pi^2}\left\{\sum_1^\infty \frac{\cos ns\cos n\sigma}{n(1-q^n)} + \sum_1^\infty \frac{\sin ns\sin n\sigma}{n(1+q^n)}\right\}.$$

Diese Reihenentwicklung konvergiert, solange nicht $s=\sigma$ ist, in welchem Falle $\Delta(s\sigma)$ logarithmisch unendlich wird.

Die Richtigkeit der Lösung bei der Ellipse ist jetzt leicht zu kontrollieren. Machen wir zunächst die Annahme, es würden die Randwerte $f(s)$

$$f(s) = A\cos\varkappa s + B\sin\varkappa s$$

vorgeschrieben sein, wobei $\varkappa$ eine ganze Zahl $\neq 0$ ist. Man bekommt hier $df(s) = f'(s)\cdot ds$ und durch Auswertung von $\mu(\sigma) = \int_0^{2\pi}\Delta(s\sigma)f'(s)ds$ erscheint

$$\mu(\sigma) = \frac{A\sin\varkappa\sigma}{\pi(1+q^\varkappa)} - \frac{B\cos\varkappa\sigma}{\pi(1-q^\varkappa)}.$$

so daß man als Dichtigkeit $\mu'(\sigma)$ erhält.

$$\mu'(\sigma) = \frac{\varkappa A\cos\varkappa\sigma}{\pi(1+q^\varkappa)} + \frac{\varkappa B\sin\varkappa\sigma}{\pi(1-q^\varkappa)}.$$

Um sich jetzt das Potential der einfachen Schicht mit dieser Dichtigkeit zu bilden, hat man $\log r_{p\sigma}$ in eine Reihe zu entwickeln. Die Reihenentwicklung ergibt sich als Realteil von $\log(z-z_\sigma)$ nach Seite 73.

Die Bestimmung des Potentials $V(p)$

$$V(p) = \int_0^{2\pi} \log \frac{1}{r_{p\sigma}} \cdot \mu'(\sigma)\, d\sigma$$

hat dann gar keine Schwierigkeiten. Man beachte, daß $q = e^{-2\varrho_0}$ und bekommt

$$V(p) = \frac{e^{\varkappa\varrho} + e^{-\varkappa\varrho}}{e^{\varkappa\varrho_0} + e^{-\varkappa\varrho_0}} \cdot A\cos\varkappa s + \frac{e^{\varkappa\varrho} - e^{-\varkappa\varrho}}{e^{\varkappa\varrho_0} - e^{-\varkappa\varrho_0}} \cdot B\sin\varkappa s \quad \text{im Innengebiete,}$$

$$V(p) = e^{\varkappa(\varrho_0 - \varrho)}[A\cos\varkappa s + B\sin\varkappa s] \qquad \text{im Außengebiete.}$$

Man erkennt sofort für $\varrho = \varrho_0$ die Übereinstimmung dieser Werte mit $A\cos\varkappa s + B\sin\varkappa s$. Ein analoges Resultat würde sich für jede Fouriersche Entwicklung der Randwerte ergeben. Aus dem soeben bewiesenen ergibt sich unmittelbar, daß durch die Randwerte eines Potentials V jedes Glied einer Fourierschen Reihe

$$f(s) = A_0 + \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\infty}(A_\varkappa \cos\varkappa s + B_\varkappa \sin\varkappa s)$$

bis auf das erste, d. h. A_0, genau dargestellt wird. Die Annahme konstanter Randwerte A_0 führt nun, wie sofort ersichtlich ist, auf ein identisch verschwindendes Potential V, so daß also unsere Methode ein Potential der einfachen Schicht gibt, welches die Randwerte

$$\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=\infty}(A_\varkappa \cos\varkappa s + B_\varkappa \sin\varkappa s),$$

d. h. $f(s) - A_0$ besitzt. Nach § 30 S. 74 ist nun A_0 genau die Neumannsche Konstante der Randwerte $f(s)$, in Übereinstimmung mit dem Ergebnisse des § 40. Die aufgestellte Formel ist also richtig.

§ 42.

Das Symmetriegesetz der Funktion $\mathfrak{G}(s\sigma)$.

Die in der bisherigen Entwicklung mit $\mathfrak{G}(s\sigma)$ bezeichnete Randfunktion erfüllt, wie bereits angedeutet wurde, das Symmetriegesetz

$$\mathfrak{G}(s\sigma) = \mathfrak{G}(\sigma s).$$

Wir hatten oben zwei Funktionen, die den folgenden (auf Null reduzierten) Gleichungen entsprechen [Gl. (81) S. 92]

$$\mathfrak{G}^+(p\sigma) + \Gamma(p) + \log r_{p\sigma} + \int \log r_{p\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\sigma\theta)\, d\theta = 0.$$

$$\mathfrak{G}^-(p\sigma) + \Gamma(p) + \log r_{p\sigma} - \int \log r_{p\theta} \cdot \frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\theta\sigma)\, d\theta = 0.$$

Da aber

$$\mathfrak{H}_\lambda(\theta\sigma) = \frac{d}{d\sigma}\mathfrak{P}_\lambda(\theta\sigma),\ \mathfrak{H}_{-\lambda}(\theta\sigma) = \frac{d}{d\sigma}\mathfrak{P}_{-\lambda}(\theta\sigma) = \frac{d}{d\sigma}\mathfrak{P}_\lambda(\sigma\theta)$$

ist, so sind die beiden Funktionen $\mathfrak{G}$ Spezialfälle ein und derselben von λ abhängigen Funktion $\mathfrak{G}(p\sigma)$, die der Gleichung genügt:

$$\mathfrak{G}(p\sigma) + \Gamma(p) + \log r_{p\sigma} - \lambda \int \log r_{p\theta} \cdot \mathfrak{H}_\lambda(\theta\sigma)\, d\theta = 0 \tag{87}$$

und zwar sind $\mathfrak{G}^{+}(ps)$ und $\mathfrak{G}^{-}(ps)$ die Spezialfälle für $\lambda = -1$ bzw. $\lambda = +1$. Multipliziert man diese Gleichung mit $\mathfrak{m}'(\sigma)d\sigma$, so gibt die Integration wegen der Gleichungen (67b) S. 82, denen $\mathfrak{H}$ genügt,

$$\int \mathfrak{G}(p\sigma)\,\mathfrak{m}'(\sigma)\,d\sigma = 0, \tag{88}$$

also für $\mathfrak{G}(p\sigma)$ die Neumannsche Konstante gleich Null. $\mathfrak{G}(p\sigma)$ ist, wie man aus seiner Darstellung sofort erkennt, am Rande stetig. Lassen wir also in (87) p zu einem Randpunkt s werden, multiplizieren dann die Gleichung mit $\mathfrak{m}'(s)ds$ und finden durch Integratien

$$\int \mathfrak{G}(s\sigma)\,\mathfrak{m}'(s)\,ds = 0. \tag{88'}$$

Jetzt leiten wir das Symmetriegesetz ab. Dasselbe ergibt sich als Folge der Symmetrie von $\log r_{s\sigma}$ und der ersten daraus durch Neumannsche Operation hergeleiteten Randfunktion, die mit $g(s\sigma)$ bezeichnet wurde. (Siehe S. 28, Gl. (19).)

Es ergab sich

$$g(s\sigma) = -\int \log r_{s\theta}\cdot h(\theta\sigma)\,d\theta = g(\sigma s) = -\int \log r_{\theta s}\cdot h(\theta\sigma)\,d\theta.$$

Nun gilt für $\mathfrak{H}(\sigma s)$ die Integralgleichung

$$\mathfrak{H}(\sigma s) - h(\sigma s) + \mathfrak{m}'(\sigma) + \lambda\int h(\sigma\theta)\,\mathfrak{H}(\theta s)\,d\theta = 0.$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit $\log r_{\tau\sigma}\cdot d\sigma$ und integrieren

$$\int \log r_{\tau\sigma}\,\mathfrak{H}(\sigma s)\,d\sigma - \Gamma + \left[g(\tau\sigma) - \lambda\int g(\tau\sigma)\,\mathfrak{H}(\theta s)\,d\theta\right] = 0.$$

Die Klammergröße schreibt sich wegen der Symmetrie $g(\tau s) = g(s\tau)$ so, daß man bekommt

$$\int \log r_{\tau\sigma}\,\mathfrak{H}(\sigma s)\,d\sigma - \Gamma + \int\left[-\log r_{\sigma s} + \lambda\int \log r_{\sigma\theta}\,\mathfrak{H}(s\theta)\,d\theta\right]h(\sigma\tau)\,d\sigma = 0.$$

Die jetzige Klammergröße ist aber $\mathfrak{G}(\sigma s) + \Gamma$, so daß also:

$$\int \log r_{\tau\sigma}\,\mathfrak{H}(\sigma s)\,d\sigma + \int \mathfrak{G}(\sigma s)\,h(\sigma\tau)\,d\sigma = 0.$$

Daraus wegen (87) nach Multiplikation mit λ

$$\mathfrak{G}(\tau s) + \Gamma + \log r_{\tau s} + \lambda\int \mathfrak{G}(\sigma s)\,h(\sigma\tau)\,d\sigma = 0. \tag{89}$$

Dies ist eine Integrationsgleichung für $\mathfrak{G}(\tau s)$. Dieser genügt aber auch $\mathfrak{G}(s\tau)$; denn multipliziert man sie mit $\mathfrak{H}(\tau\theta)\,d\tau$, integriert und hebt unter dem Integral $\mathfrak{G}$ heraus, so bekommt man

$$\int \log r_{s\tau}\,\mathfrak{H}(\tau\theta)\,d\tau + \int \mathfrak{G}(\sigma s)\left[\mathfrak{H}(\sigma\theta) + \lambda\int h(\sigma\tau)\,\mathfrak{H}(\tau\theta)\,d\tau\right]d\sigma = 0.$$

In der Klammer steht $h(\sigma\theta) - \mathfrak{m}'(\sigma)$, so daß wegen (88') erscheint

$$\int \log r_{s\tau}\,\mathfrak{H}(\tau\theta)\,d\tau + \int \mathfrak{G}(\sigma s)\,h(\sigma\theta)\,d\sigma = 0.$$

Dies gibt wegen (87) und (89) direkt

$$\mathfrak{G}(s\theta) = \mathfrak{G}(\theta s). \tag{90}$$

Das Symmetriegesetz läßt sich auch leicht herleiten, wenn man von der Entwickelbarkeit von $\mathfrak{H}_{\lambda}(\theta\sigma)$ in eine Potenzreihe nach λ Gebrauch macht und in (87) einsetzt. Die Symmetrie ist dann eine Folge derselben Eigenschaft aller aus $\log r_{s\sigma}$ sukzessive durch die Neumannsche Operation hergeleiteten Randfunktionen. Diese erweist sich ihrerseits als Folge der Symmetrie von $\log r_{s\sigma}$ und der ersten daraus abgeleiteten Funktion $g(s\sigma)$.

§ 43.

Die Funktion $\mathfrak{G}(ps)$ hat eine selbständige Bedeutung in dem Umstand in einfacher Weise das Strömungsproblem zu lösen.

Es sei z. B. die Aufgabe vorgelegt ein Potential der einfachen Schicht $V(p)$ zu bestimmen, welches das Problem

$$(1+\lambda)\frac{\partial V}{\partial n}(s^-) - (1-\lambda)\frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = 2\lambda f'(s)$$

löst. Setzt man

$$V(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int \log\frac{1}{r_{ps}}\cdot \mu'(s)\,ds,$$

so genügt $\mu'(s)$, wie gezeigt, der Gleichung

$$\mu'(s) + \lambda\int h(s\theta)\,\mu'(\theta)\,d\theta = f'(s).$$

Da

$$\int h(s\theta)\,ds = 1$$

ist, findet man durch Integration

$$(1+\lambda)\int \mu'(s)\,ds = \int f'(s)\,ds,$$

und daraus, wenn λ nicht $= -1$ ist, die Gesamtmasse $\frac{\lambda}{\pi}\int \mu'(s)\,ds$. Wäre aber $\lambda = -1$, so hätte man $-2\frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = f'(s)$ und daraus durch Integration $\int f'(s)\,ds = 0$, da für jedes Potential $\int \frac{\partial V}{\partial n}(s^+)\,ds = 0$ ist. In diesem Falle muß also $f'(s)$ der Bedingung $\int f'(s)\,ds = 0$ genügen, wenn die Lösung überhaupt existieren soll.

Nunmehr können wir die Lösung des Problems mit Hilfe der Funktion $\mathfrak{G}(ps)$ leicht bewerkstelligen. Multplizieren wir

$$\mathfrak{G}(ps) + \Gamma(p) + \log r_{ps} + \lambda\int \mathfrak{G}(p\theta)\,h(\theta s)\,d\theta = 0$$

mit $\mu'(s)\,ds$, integrieren und heben unter dem Integralzeichen die Funktion $\mathfrak{G}(p\theta)$ aus den beiden sie enthaltenden Gliedern heraus, so bekommen wir

$$\Gamma(p)\int \mu'(s)\,ds + \int \log r_{ps}\cdot\mu'(s)\,ds + \int \mathfrak{G}(p\theta)\left[\mu'(\theta) + \lambda\int h(\theta s)\mu'(s)\,ds\right]d\theta = 0.$$

Die Klammergröße ist $f'(\theta)$ und wir finden

$$-\int \log r_{ps}\cdot\mu'(s)\,ds = \Gamma(p)\int \mu'(s)\,ds + \int \mathfrak{G}(p\theta)\,f'(\theta)\,d\theta.$$

Die Lösung $V(p)$ ergibt sich also in der Form

$$V(p) = m\,\Gamma(p) + \frac{\lambda}{\pi}\int \mathfrak{G}(p\theta)\,f'(\theta)\,d\theta,$$

wo mit $m = \frac{\lambda}{\pi}\int \mu'(s)\,ds$ die Masse des Potentials V bezeichnet wurde, die wir vorhin aus $f'(s)$ berechnet haben.

Für $\lambda = -1$ bekommt man das Problem für das Innengebiet, wobei $\int f(s)\,ds = 0$ sein muß. Da das Leiterpotential $\Gamma(p)$ im Innengebiete konstant ist, auf eine Konstante es aber beim Problem

$$\frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = f'(s)$$

nicht ankommt, so hat man für das Innengebiet die Lösung

$$V(p) = -\frac{1}{\pi}\int \mathfrak{G}^-(p\,\theta) f'(\theta)\,d\theta.$$

Für das Außengebiet ist $\lambda = +1$ zu setzen und bekommt für das Problem

$$\frac{\partial V}{\partial n}(s^-) = f'(s)$$

die Lösung

$$V(p) = m\,\Gamma(p) + \frac{1}{\pi}\int \mathfrak{G}^+(p\theta) f'(\theta)\,d\theta,$$

wobei die Masse m nach obigem sich leicht ergibt.

Wir fanden so, daß mit Hilfe der Randfunktionen $\mathfrak{G}^{\pm}(p\,s)$ sich das Strömungsproblem im Außen- und Innengebiete lösen läßt, falls es überhaupt lösbar ist. Die Lösbarkeit der Gleichung

$$\mu'(s) + \lambda \int h(s\,\theta)\,\mu'(\theta)\,d\theta = f(s)$$

ist hier vorausgesetzt worden. In der Tat läßt sich hier aber auch ohne Fredholmsche Theorie leicht nachweisen, daß die erhaltenen Ausdrücke $V(p)$ die Lösung auch wirklich geben, sobald $\mathfrak{G}(ps)$ die Gleichung (81) S. 92 oder (89) befriedigt. Man muß diese Verifikation machen, um nicht in den Fehler zu verfallen, wie er leicht begangen wird, wenn man aus der Kenntnis einer Greenschen Funktion die Lösbarkeit der Aufgabe und die Form der Lösung erschließen will. Man übersieht, daß man die Lösbarkeit schon vorausgesetzt hat und nur unter dieser Voraussetzung hat man eine Darstellung der Lösung mit Hilfe der Greenschen Funktion aus der gegebenen Randfunktion erhalten. Daraus folgt aber für die Lösbarkeit des Problems gar nichts, denn es könnte ja der Ausdruck, den man erhalten hat, irgend etwas ergeben, und nicht die Lösung, falls solche nicht existieren würde. *Man muß also betonen, daß aus der Existenz, etwa aus der Kenntnis der Greenschen Funktion noch gar nichts über die Lösbarkeit der Randwertaufgabe ausgesagt ist,* es bleibt dann immer noch die Schwierigkeit der Verifikation der Greenschen Darstellung, welche aber sofort entfällt, wenn von anderer Seite die Lösbarkeit des Randwertproblems feststeht.

Die Funktionen $\mathfrak{G}(s\sigma)$, die im vorigen Parapraph eine so ausschlaggebende Rolle gespielt haben, erweisen sich also als Randwerte jener Funktionen, die die Strömungsprobleme lösen. Die hier mit $\mathfrak{G}(p\,s)$ bezeichneten Funktionen wurden in anderer Weise zuerst von *F. Neumann* eingeführt und erhielten von ihm den Namen *„charakteristische Funktion"*.