§ 34.

Das Symmetriegesetz $\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ hat uns nicht nur die gleichzeitige Lösung der Randwertaufgaben für das Innengebiet und Außengebiet einer Kurve ergeben, sondern wir können aus ihm noch einen sehr interessanten Satz über die Verteilung der Pole der Funktion $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ und hiermit auch der von $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ entnehmen. Das Symmetriegesetz zeigt uns, daß λ_0 und $-\lambda_0$ gleichzeitig Pole von $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ sind. Daß die Pole der Funktionen $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ und $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ dieselben sind, folgt aus der Gleichung (75), sowie der ersten in (73); daß ferner ± 1 kein Pol der Funktion $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$, also auch nicht von $\mathfrak{P}(\sigma s)$ ist, wissen wir ebenfalls schon. Überdies ist bereits gezeigt worden, daß die Pole sämtlich reell sind und nicht kleiner als Eins, daß sie auch einfach sind, wurde ebenfalls bewiesen. Für den Fall eines singulären λ-Wertes, d. h. eines Poles von $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ ist die homogene Integralgleichung, also das homogene Randwertproblem $(f(s) = 0)$ lösbar und zwar durch eine Anzahl von linear unabhängigen Lösungen, die wegen der Einfachheit der Pole, genau mit der Ordnung des Nullwerdens des Fredholmschen Nenners $D(\lambda)$ übereinstimmt. Wir können jetzt auch sagen:

Beim logarithmischen Potential liegen die Nullstellen des Fredholmschen Nenners $D(\lambda)$ alle in der reellen λ-Achse symmetrisch zum Nullpunkte und zwar sind λ_0 und $-\lambda_0$ immer gleichzählige Nullstellen von $D(\lambda)$. Die einzige Ausnahme tritt für $\lambda_0 = \pm 1$ ein.

Man kann dem Satze auch die Fassung geben:

Befreit man beim Newtonschen Potential den Fredholmschen Nenner vom Faktor $1 + \lambda$, so bekommt man eine ganze Funktion von λ^2.

§ 35.

Für den Fall eines singulären λ-Wertes ist das Neumann-Poincarésche Problem in homogener Form lösbar d. h. es gibt Lösungen von

$$(1 + \lambda_0)\, W(s^-) = (1 - \lambda_0)\, W(s^+),$$

welche Poincaré „Fundamentalfunktionen" genannt hat. Wir können jetzt über diese Fundamentalfunktionen Poincarés die Aussage machen:

Die beiden homogenen Randwertprobleme Poincarés

$$(77)\qquad \begin{gathered} (1 + \lambda_0)\, W(s^+) = (1 - \lambda_0)\, W(s^-) \\ \textit{und} \\ (1 - \lambda_0)\, W(s^+) = (1 + \lambda_0)\, W(s^-) \end{gathered}$$

haben im Falle des logarithmischen Potentials außer für $\lambda_0 = \pm 1$, immer dieselbe Anzahl linear unabhängiger Lösungen durch Potentiale $W(p)$ der Doppelschicht.

Bei der Untersuchung dieses Paragraphen hätte man sich gar nicht auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet beschränken müssen; wenn es sich gerade um $\lambda_0 = \pm 1$ handelt, so hat es keinen Wert über eine solche Annahme hinauszugehen.

Man könnte nun die Frage aufwerfen, ob denn dieses Symmetriegesetz über die Verteilung der Nullstellen von $D(\lambda)$ nicht doch auch beim Newtonschen Potential besteht. Die Frage erledigt aber schon der Spezialfall der Kugel, wo für den Fredholmschen Nenner

$$D(\lambda) = (1+\lambda)e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{2}} \cdot \left(1+\frac{\lambda}{3}\right)^3 \cdot e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{6}} \cdot \left(1+\frac{\lambda}{5}\right)^5 \cdot e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{10}} \cdot \left(1+\frac{\lambda}{7}\right)^7 \cdot e^{-\lambda+\frac{\lambda^2}{14}} \cdots$$

sich ergibt. Man könnte etwa vermuten, daß beim Newtonschen Potential allgemein alle Nullstellen von $D(\lambda)$ negativ sind.

Ein Äquivalent für das obige Symmetriegesetz $\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s)$ gibt es beim Newtonschen Potential nicht. Dieses Gesetz wurzelt ja in der Eigenschaft des logarithmischen Potentials $\log r_{ps}$ ein konjugiertes $\operatorname{arctg} \frac{y-y_s}{x-x_s}$ zu besitzen, dessen Symmetrie die eigentliche Quelle des Resultates ist.

§ 36.

Es bleibt uns noch übrig, über die Berechnung der Funktion $\mathfrak{P}_{\lambda}(\sigma s)$ einige Bemerkungen zu machen. Die Definitionsgleichung für $\mathfrak{p}(\sigma s)$, nämlich

$$\mathfrak{p}(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x} - \mathfrak{m}(\sigma) - \mathfrak{m}(s)$$

bestimmt die symmetrische Funktion $\mathfrak{p}(\sigma s)$ nicht unzweideutig, da es ja noch willkürlich ist, wo die Zählung der natürlichen Massenverteilung $\mathfrak{m}(\sigma)$ beginnt, denn in der Definitionsgleichung für $\mathfrak{m}(\sigma)$, d. h. $\mathfrak{m}(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(\theta)\, d\theta$ war die untere Grenze beliebig angenommen worden. Nun wollen wir $\mathfrak{p}(\sigma s)$ von jeder Zweideutigkeit befreien. Wählt man für σ_0 irgend einen festen Punkt, so bekommt man ein $\mathfrak{p}$, von dem jedes andere sich nur um eine Konstante unterscheiden kann und man kann auch jeden addidiven konstanten Unterschied in der Form einer Änderung der untern Grenze σ_0 darstellen, da $\mathfrak{m}(\sigma) = \int_{\sigma_0}^{\sigma} \mathfrak{m}'(s)\, ds$ stetig ist und nach einem Umlauf des σ oder σ_0 sich additiv um Eins ändert. Nur eines von den $\mathfrak{p}(\sigma s)$ wird die ausgezeichnete Eigenschaft

$$\int \mathfrak{p}(\sigma s)\mathfrak{m}'(s)\, ds = 0 \tag{78}$$

ergeben und zwar unabhängig von σ, wenn nur die Integration sich über die ganze Kurve erstreckt. Daß das Integral bei dieser Erstreckung von σ nicht abhängt, erkennt man durch Differentiation, da ja

$$\int \mathfrak{h}(\sigma s)\mathfrak{m}'(s)\, ds = \int h(\sigma s)\mathfrak{m}'(s)\, ds - \mathfrak{m}'(\sigma)\int \mathfrak{m}'(s)\, ds = 0$$

wegen (36) S. 56 sich ergibt. Sollte also bei einer Wahl des $\mathfrak{p}(\sigma s)$ sich das konstante Integral nicht Null ergeben, so wird man wegen $\int \mathfrak{m}'(s)\, ds = 1$

stets eine solche Konstante, nämlich genau den Integralwert, von $\mathfrak{p}(\sigma s)$ abziehen können, daß das neue $\mathfrak{p}(\sigma s)$ das Integral in (78) zu Null macht. Dann ist $\mathfrak{p}(\sigma s)$ ganz unzweideutig bestimmt.

Multipliziert man jetzt die zweite der Gleichungen (73) S. 83 mit $\mathfrak{m}'(s)ds$, so bekommt man durch Integration wegen (78) die Gleichung

$$\int \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)\mathfrak{m}'(s)ds = 0. \tag{79}$$

während sich aus (67b) S. 82 durch Integration nach σ für dieses Integral im allgemeinen eine Konstante ergeben hätte. Jetzt hat auch das erhaltene $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ dieselbe ausgezeichnete Eigenschaft, wie $\mathfrak{p}(\sigma s)$. Man wird bemerkt haben, daß das Integral (78) gerade die Neumannsche Konvergenzkonstante der Funktion $\mathfrak{p}(\sigma s)$ ist. *Es läßt sich also erreichen, daß die Neumannsche Konstante der Funktion* $\mathfrak{p}(\sigma s)$ *Null wird. Dadurch ist die Funktion* $\mathfrak{p}(\sigma s)$ *unzweideutig bestimmt.* Dieser Funktion entspricht dann wieder ganz unzweideutig eine Funktion $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$, die den Integralgleichungen (73) genügt. Weil nun $\frac{d}{d\sigma}\mathfrak{p}(\sigma s) = h(\sigma s) - \mathfrak{m}'(\sigma)$, so sieht man, daß jetzt wegen (79) die zweite der Integralgleichungen (73) in der Form geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) + \lambda\int \mathfrak{P}_\lambda(\sigma\theta)h(\theta s)d\theta = \mathfrak{p}(\sigma s).$$

Aus dieser Integralgleichung läßt sich die Funktion $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ in der Form einer sicher über den Einheitskreis des λ konvergenten Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) = \mathfrak{p}(\sigma s) - \lambda\mathfrak{p}_1(\sigma s) + \lambda^2\mathfrak{p}_2(\sigma s) - \lambda^3\mathfrak{p}_3(\sigma s) + \cdots \tag{80}$$

gewinnen, in der die Funktionen

$$\mathfrak{p}_1(\sigma s),\ \mathfrak{p}_2(\sigma s),\ \mathfrak{p}_3(\sigma s), \ldots$$

aus $\mathfrak{p}(\sigma s)$ durch sukzessive Anwendung der Neumannschen Operation $\mathfrak{p}_\varkappa(\sigma s) = \int \mathfrak{p}_{k-1}(\sigma\theta)h(\theta s)d\theta$ hervorgehen; den einen Punkt σ hat man dabei nur als Parameter festzuhalten. Hätten wir nicht die ausgezeichnete Wahl des $\mathfrak{p}(\sigma s)$ getroffen, so würden wir aus der zweiten Gleichung (73) ebenfalls eine konvergente Potenzreihe ähnlicher Form wie (80) herleiten können, die sukzessiven Operationen sind dann aber nicht die gewöhnlichen Neumannschen.

Aus der letzten Integralgleichung können wir eine einfache Deutung für die Funktion $\mathfrak{P}(\sigma s)$ für den Fall, daß $\lambda = \pm 1$ ist, entnehmen. Sie besteht im folgenden: Betrachtet man den Punkt σ in $\mathfrak{p}(\sigma s)$ nur als einen Parameter und *legt man sich die Aufgabe vor, ein Potential zu finden, welches am Innen, bzw. am Außenrand im Punkte s den Randwert* $\mathfrak{p}(\sigma s)$ *annimmt, dann ist* $\frac{1}{\pi}\mathfrak{P}(\sigma s)$ *die Belegung eines Potentials der Doppelschicht mit diesen Werten am Innenrande,* $-\frac{1}{\pi}\mathfrak{P}(s\,\sigma)$ *die Belegung eines solchen mit den Außenrandwerten* $\mathfrak{p}(\sigma s)$. Die Neumannsche Konstante von $\mathfrak{p}(\sigma s)$ ist Null, so daß die Lösung auch im Außengebiete ohne additive Konstante schon durch ein Potential der Doppelschicht möglich ist.

§ 37.

Die Masse bis zum Punkte σ, d. h. $\mathfrak{m}(\sigma)$, die der natürlichen Belegung entspricht, ist eine am Rande stetig wachsende Funktion, die beim Umlauf um die Kurve sich um eins vergrößert. Die Monotonie kann man aus dem Umstand erschließen, daß $\mathfrak{m}'(\sigma)$ eine nirgends negative Größe ist. Das Leiterpotential

$$\Gamma(p) = \int \log \frac{1}{r_{p\sigma}} \cdot d\mathfrak{m}(\sigma)$$

hat im Unendlichen die Entwicklung $\log \frac{1}{R} + \cdots$ ist also negativ, sobald R hinreichend groß ist. Da es am Rande konstant ist, so liegt hier das Maximum, so daß $\Gamma(p)$ überall vom Rande aus nach außen abnimmt. Da das Potential $\Gamma(p)$ im Innengebiete konstant ist, so geben die Gleichungen (17a) S. 25 für $\frac{\partial \Gamma}{\partial n}(\bar{s}) = 2\pi \mathfrak{m}'(s)$, wenn $\mathfrak{m}'(\sigma)$ die Ableitung von $\mathfrak{m}(\sigma)$ nach dem Bogen bedeutet. Da aber $\Gamma(p)$ im Außengebiete in der Richtung der positiven Normale, d. h. gegen den Rand hin zunimmt, ist $\mathfrak{m}'(\sigma)$ positiv.

Bildet man sich mit Hinzunahme der zu $\Gamma(p)$ konjugierten Funktion die analytische Funktion von $z = x + iy$

$$Z = -\int \log (z - z_\sigma) \cdot d\mathfrak{m}(\sigma)$$

so gibt e^Z eine konforme Abbildung des Außengebietes der Kurve in einen Kreis mit gegenseitig eindeutigem Entsprechen des Außengebietes und des Kreisinneren einschließlich der Randkurven. Der unendlich ferne Punkt hat seinen Bildpunkt im Kreismittelpunkte. Auf den Beweis der eindeutigen Zuordnung der Randpunkte will ich hier nicht näher eingehen. Diese läßt sich auf die Monotonie von $\mathfrak{m}(\sigma)$ zurückführen.

§ 38.

Die Funktionen $\mathfrak{p}(\sigma s)$ und $\mathfrak{P}(\sigma s)$ bei der Ellipse.

Im Paragraph 30 wurde die Lösung des Problemes an den Beispielen, Kreis und Ellipse erörtert. Da der Kreis als Grenzfall der Ellipse sich ergibt, ist es nicht nötig, auf ihn noch gesondert zurückzukommen.

Bei der Ellipse fanden wir (S. 72)

$$\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} = \frac{\sigma + s + \pi}{2} + \sum_1^\infty \frac{q^n}{n} \cdot \sin n(\sigma + s).$$

Für $H(\sigma s)$ ergab sich (s. S. 72)

$$H(\sigma s) = \frac{1}{2\pi(1+\lambda)} + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 + \lambda q^n} \cdot \cos n\sigma \cos ns - \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 - \lambda q^n} \cdot \sin n\sigma \sin ns,$$

so daß also

$$\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 + \lambda q^n} \cdot \cos n\sigma \cos ns + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 - \lambda q^n} \sin n\sigma \sin ns.$$

Das für $\lambda = -1$ unendlich wachsende Glied gibt die Funktion $\mathfrak{m}'(\sigma)$ gleich $\frac{1}{2\pi}$, so daß also $\mathfrak{m}(\sigma) = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\sigma} \mathfrak{m}'(\sigma)\,ds = \frac{\sigma + \frac{\pi}{2}}{2\pi}$, wenn die Stelle $\sigma_0 = -\frac{\pi}{2}$ zum Ausgangspunkt der Massenzählung $\mathfrak{m}(\sigma)$ der natürlichen Verteilung gewählt wird.

Die Funktion $\mathfrak{p}(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s} - \mathfrak{m}(\sigma) - \mathfrak{m}(s)$
hat jetzt den Wert

$$\mathfrak{p}(\sigma s) = \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty \frac{q^n}{n} \sin n(\sigma + s) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{1 - q\cdot e^{-i(\sigma+s)}}{1 - q\cdot e^{i(\sigma+s)}} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{q \sin(\sigma + s)}{1 - q\cos(\sigma + s)}$$

und erfüllt wirklich die Bedingung $\int\limits_0^{2\pi} \mathfrak{p}(\sigma s)\mathfrak{m}'(s)\,ds = 0$. Daraus entnimmt man auch den Grund für die Zählung der Masse $\mathfrak{m}(\sigma)$ vom Punkte $\sigma_0 = -\frac{\pi}{2}$.

Die Funktion $\mathfrak{H}_\lambda(\sigma s)$ ist die Ableitung von

$$\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s) = \frac{1}{\pi}\sum \frac{q^n}{n(1+\lambda q^n)} \sin n\sigma \cos ns + \frac{1}{\pi}\sum \frac{q^n}{n(1-\lambda q^n)} \cos n\sigma \sin ns.$$

Die Konstante ist wieder richtig gewählt, da $\int\limits_0^{2\pi} \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)\mathfrak{m}'(s)\,ds = 0$ ist. Aus der Darstellung des $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ entnimmt man leicht das Gesetz

$$\mathfrak{P}_{-\lambda}(s\sigma) = \mathfrak{P}_\lambda(\sigma s).$$

Für die speziellen Werte $\lambda = \pm 1$ kann für $\mathfrak{P}_\lambda(\sigma s)$ noch eine einfachere Darstellung gewonnen werden. Oben haben wir für diesen Fall gesetzt $\mathfrak{P}_1(\sigma s) = \mathfrak{P}_{-1}(s\sigma) = \mathfrak{P}(\sigma s)$. Wir bestimmen die in σ und s symmetrische Funktion $\mathfrak{P}(\sigma s) + \mathfrak{P}(s\sigma)$ und die alternierende $\mathfrak{P}(\sigma s) - \mathfrak{P}(s\sigma)$.

Man bekommt

$$\mathfrak{P}(\sigma s) + \mathfrak{P}(s\sigma) = \frac{2}{\pi}\sum \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \sin n(s+\sigma)$$

$$\mathfrak{P}(\sigma s) - \mathfrak{P}(s\sigma) = \frac{2}{\pi}\sum \frac{q^{2n}}{n(1-q^{2n})} \sin n(s-\sigma).$$

Mit Rücksicht auf

$$\sum \frac{q^\varkappa}{\varkappa} \sin \varkappa x = \frac{1}{2i}\sum \frac{q^\varkappa e^{\varkappa x i}}{\varkappa} - \frac{1}{2i}\sum \frac{q^\varkappa e^{-\varkappa x i}}{\varkappa} = \frac{1}{2i} \log \frac{1 - qe^{-\varkappa x i}}{1 - qe^{+\varkappa x i}}$$

erhält man durch Reihenentwicklung von $1 : (1 - q^{2n})$ folgende Darstellung

$$\mathfrak{P}(\sigma s) + \mathfrak{P}(s\sigma) = \frac{1}{\pi i} \log \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2\varkappa-1}\cdot e^{-i(s+\sigma)}}{1 - q^{2\varkappa-1}\cdot e^{+i(s+\sigma)}}$$

$$\mathfrak{P}(\sigma s) - \mathfrak{P}(s\sigma) = \frac{1}{\pi i} \log \prod_1^\infty \frac{1 - q^{2\varkappa}\cdot e^{-i(s-\sigma)}}{1 - q^{2\varkappa}\cdot e^{+i(s-\sigma)}}.$$

Daraus läßt sich durch Addition $\mathfrak{P}(\sigma s)$ bestimmen. Theoretisch ist diese Darstellung einfacher als die Reihe, weil sie unmittelbar das Verhalten von $\mathfrak{P}(\sigma s)$ als Funktion von σ auch im Komplexen zeigt und angibt, wo die (logarithmischen) Unstetigkeiten liegen.

Im Paragraph 32 wurde gezeigt, daß zur Lösung der beiden Randwertaufgaben schon die Kenntnis von $\mathfrak{H}_{+1}(\sigma s) + \mathfrak{H}_{-1}(\sigma s)$ ausreicht. Diese Funktion ist aber die Ableitung von $\mathfrak{P}(\sigma s) + \mathfrak{P}(s \sigma)$. Man kommt somit immer schon mit der einen Funktion

$$\mathfrak{P}(\sigma s) + \mathfrak{P}(s \sigma)$$

aus, die andere, nämlich $\mathfrak{P}_{+1}(\sigma s) - \mathfrak{P}_{-1}(\sigma s)$, ergibt sich aus der ersten durch eine Neumannsche Operation. Man könnte dies schon als Ergebnis des § 32 betrachten; das neue aber, was das Symmetriegesetz $\mathfrak{P}_{-1}(\sigma s) = \mathfrak{P}_{+1}(s \sigma)$ leistet, ist darin enthalten, *daß* $\mathfrak{P}_{+1}(\sigma s) + \mathfrak{P}_{-1}(\sigma s)$ *eine symmetrische Funktion ist,* $\mathfrak{P}_{+1}(\sigma s) - \mathfrak{P}_{-1}(\sigma s)$ aber bei Vertauschung der Punkte s, σ das Vorzeichen wechselt.

§ 39.

Das Potential, welches dieselben gegebenen Werte am Innenrand und Außenrand annimmt.

Es ist bekannt, daß das Potential der einfachen Schicht am Innenrand und am Außenrand dieselben Werte annimmt. Man könnte nun, von diesem Umstand Gebrauch machend, den Versuch machen, wenn die Randwerte gegeben sind, die ein Potential am Rande annehmen soll, dadurch die Aufgabe für das Innen- und Außengebiet mit einem Schlage zu lösen, daß man ein Potential der einfachen Schicht bestimmt, welches die gegebenen Randwerte hat. Dies wäre auch eine einfache Beantwortung der K. Neumannschen Fragestellung. Dem Versuche stellen sich aber sofort unüberwindliche Schwierigkeiten entgegen, so lange man an den althergebrachten Definitionen des Potentials der einfachen Schicht festhält. Wir wissen ja, daß bei vorgegebenen stetigen Randwerten ein Potential im Innengebiete sowohl als auch eines im Außengebiete existiert, welches am Rande die gegebenen Randwerte hat. Da aber das Potential der Doppelschicht mit durchaus stetigen Randwerten keine normalen Ableitungen zu haben braucht, so sieht man, daß die Stetigkeit der Randwerte zur Existenz normaler Ableitungen nicht hinreicht. Weil nun das Potential der einfachen Schicht in der klassischen Form immer auch normale Ableitungen hat, so erscheint die Absicht unausführbar.

Der geschilderte Umstand hat den Verfasser dieser Schrift zur Untersuchung der wahren Ursache dieser geringen Leistungsfähigkeit des Potentiales V der einfachen Schicht veranlaßt. Es zeigte sich nun, daß der Grund
S. 17 in der zu speziellen Form des Potentials V zu suchen sei, und daß eine ähnliche Allgemeinheit wie beim Potential W der doppelten Schicht erreicht wird, sobald man V in der von uns vorausgesetzten Form

$$V(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot d\mu(s)$$

annimmt und unter $d\mu(s)$ die sogenannte „Masse" auf dem Randelemente ds versteht. Man wird aber dabei auch gleichzeitig veranlaßt, den Begriff der normalen Ableitungen zu verlassen und wird von selbst dazu geführt, den von uns oben „Strom" genannten Begriff an die Stelle treten zu lassen.

Beim logarithmischen Potential ist dies um so leichter, da der Begriff des Stromes durch das konjugierte Potential gegeben ist.

Nach diesen Bemerkungen können wir an die Ausführung des Planes herantreten. Die übliche Art der Überlegung würde die folgende sein. Man bestimme irgendwie, z. B. in der Form eines Potentials der Doppelschicht, ein Potential, welches am Innenrande die gegebenen Randwerte $f(s)$ hat; daraufhin bestimme man ebenso ein Potential mit den äußeren Randwerten $f(s)$ und regulärem Verhalten im Unendlichen. Es sei $U(p)$ das Potential in beiden Gebieten, im Innern das frühere Innenpotential, im Außengebiete das vorher bestimmte Außenpotential. Es handelt sich jetzt darum, ob ich dieses Potential U, das ja stetig durch den Rand hindurchgeht und am Rande, sowohl am inneren als am äußeren die gegegebenen Randwerte $f(s)$ hat, als Potential der einfachen Schicht darstellen kann. Soll dies möglich sein, schließt man weiter, so müssen beiderseits normale Ableitungen existieren und ich kann mir ihren Sprung $\frac{\partial U}{\partial n}(s^-) - \frac{\partial U}{\partial n}(s^+) = 2\pi\mu'(s)$ bestimmen. Verwende ich jetzt die so erhaltene Funktion $\mu'(s)$ als Dichte eines Potentials der einfachen Schicht V, so wird dieses Potential bekanntlich ebenfalls in ihren normalen Ableitungen den Sprung $2\pi\mu'(s)$ aufweisen, wird aber durch die Berandung stetig hindurchgehen, wie das Potential U. Die Differenz $U - V$ hat nun keinen Sprung der normalen Ableitungen mehr und hat auch einen stetigen Durchgang der Potentialwerte durch die Berandung. So ein Potential mit stetigen Randwerten und stetigen normalen Ableitungen erweist sich aber nach den Greenschen Formeln als konstant. Es wäre also, wenn die Überlegungen strenge begründet sind, das so konstruierte Potential wirklich bis auf eine additive Konstante schon die Lösung und mehr läßt sich ja natürlich auch im allgemeinen Falle nicht erreichen.

Wir können jetzt dieselbe Überlegung mit Umgehung der normalen Ableitungen machen. Ich bestimme mir zuerst ein Potential U, wie oben mit den beiderseitigen Randwerten $f(s)$. Daraufhin suche ich das konjugierte Potential $\overline{U}$ im Außen- und Innengebiet. Dieses habe gewisse stetige Randwerte auf jeder Seite (das wird sich ja zeigen). Jetzt suche ich das Potential V der einfachen Schicht, dessen konjugiertes Potential $\overline{V}$ im Unendlichen regulär ist und denselben Sprung am Rande hat, wie $\overline{U}$. Ich beweise: V ist bis auf eine additive Konstante das Potential U mit den beiderseitigen gegebenen Randwerten $f(s)$. Dies ist ja richtig, denn $U - V$ ist zunächst ein Potential mit stetigem Durchgang durch den Rand. Sein konjugiertes Potential ist $\overline{U} - \overline{V}$ und dieses hat wieder stetigen Durchgang durch den Rand, so daß also $(U - V) + i(\overline{U} - \overline{V})$ stetig ist am Rande, es ist auch regulär im Unendlichen. *Geht aber eine analytische Funktion — eine solche ist ja* $(U - V) + i(\overline{U} - \overline{V})$ *— durch eine Kurve stetig hindurch und ist sie auf derselben selbst stetig, so ist sie analytisch auf der Kurve.* Eine Funktion jedoch, die sowohl im Außen- als im Innengebiet und am Rande regulär ist, also in der ganzen Ebene sich regulär verhält, ist einzig die Konstante. Damit ist der Vorgang zu Ende.

§ 40.

Es seien nun $f(s)$ die Randwerte, die wir *durchaus stetig* annehmen wollen. Die Potentiale mit den Randwerten $f(s)$ sind auf S. 84 angegeben. Es war

$$U(p) = \frac{1}{\pi}\int f(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y-y_\sigma}{x-x_\sigma} - \pi\mathfrak{m}(\sigma) - \int \mathfrak{P}(\sigma\theta)\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y-y_\theta}{x-x_\theta}\,d\theta\right\}d\sigma$$

im Innengebiete und

$$U(p) = -\frac{1}{\pi_e}\int f(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\frac{y-y_\sigma}{x-x_\sigma} - \pi\mathfrak{m}(\sigma) + \int \mathfrak{P}(\theta\sigma)\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y-y_\theta}{x-x_\theta}\,d\theta\right\}d\sigma$$

im Außengebiete.

Das konjugierte Potential $\overline{U}$ ergibt sich, wenn $\operatorname{arctg}\frac{y-y_\sigma}{x-x_\sigma}$ und $\operatorname{arctg}\frac{y-y_\theta}{x-x_\theta}$ durch $-\log r_{p\sigma}$ bzw. $-\log r_{p\theta}$ ersetzt werden. Wir setzen nun

$$\mathfrak{G}^+(p\sigma) = -\log r_{p\sigma} + \int \mathfrak{P}(\sigma\theta)\frac{d}{d\theta}\log r_{p\theta}\cdot d\theta - \Gamma(p)$$

$$\mathfrak{G}^-(p\sigma) = -\log r_{p\sigma} - \int \mathfrak{P}(\theta\sigma)\frac{d}{d\theta}\log r_{p\theta}\cdot d\theta - \Gamma(p)^{*}).$$

Dies sind die konjugierten Ausdrücke zu den obigen Größen in { }. Die Integration per partes ist in $\mathfrak{G}$ ohne weiteres erlaubt. Der ausintegrierte Teil fällt weg und wir bekommen die Funktionen $\mathfrak{G}(p\sigma)$ in anderer Form

(81)

$$\mathfrak{G}^+(p\sigma) = -\log r_{p\sigma} - \int \log r_{p\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\sigma\theta)\cdot d\theta - \Gamma(p)$$

für das Innengebiet,

$$\mathfrak{G}^-(p\sigma) = -\log r_{p\sigma} + \int \log r_{p\theta}\cdot\frac{d}{d\theta}\mathfrak{P}(\theta\sigma)\cdot d\theta - \Gamma(p)$$

für das Außengebiet.

Das konjugierte Potential $\overline{U}(p)$ hat also die Gestalt

$$\overline{U}(p) = -\frac{1}{\pi_i}\int f(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\mathfrak{G}^+(p\sigma)\cdot d\sigma \quad \text{im Innengebiet}$$

$$\overline{U}(p) = +\frac{1}{\pi_e}\int f(\sigma)\frac{d}{d\sigma}\mathfrak{G}^-(p\sigma)\cdot d\sigma \quad \text{„ Außengebiet,}$$

Infolge der vorausgesetzten Stetigkeit der Randwerte $f(s)$ kann man in diesen zwei Gleichungen wieder die Integration per partes anwenden, wobei wegen der Stetigkeit von $f(s)$ und $\mathfrak{G}$ der ausintegrierte Teil zum Wegfall kommt. Also ist

(82)

$$\overline{U}(p) = -\frac{1}{\pi_i}\int \mathfrak{G}^+(p\sigma)\cdot df(\sigma) \quad \text{im Innengebiete}$$

$$\overline{U}(p) = +\frac{1}{\pi_e}\int \mathfrak{G}^-(p\sigma)\cdot df(\sigma) \quad \text{„ Außengebiete.}$$

---

*) Die Hinzufügung des (von σ unabhängigen) Leiterpotentiales ist von keinem Einfluß, da es sich durch Differentiation nach σ weghebt. Das Hinzufügen macht die Neumannsche Konstante von $\mathfrak{G}$ zu Null, wäre aber für die jetzige Betrachtung nicht nötig.