das Wesentliche. In diesem Falle ist aber die Konstante als Außenpotential zuzulassen und es ergeben sich keine singulären Fälle.

Wir beherrschen nunmehr die Randwertaufgabe vollständig. Die Lösung gestaltet sich etwa folgendermaßen.

Im Innnengebiete kann die Randwertaufgabe direkt durch die K. Neumannsche Reihe gelöst werden.

Im Außengebiete löst die Neumannsche Reihe in der Form eines Potentials der Doppelschicht, welches also, falls es mehrere Randkurven gibt, auf jeder einzeln die Masse Null hat, das Problem nur bis auf je einen konstanten Unterschied auf jeder einzelnen Kurve. Wenn dann die Aufgabe vorliegt, die Randwerte durch ein Potential genau darzustellen, so ist noch ein Potential mit gegebenen konstanten Randwerten auf den einzelnen Kurven zu suchen. In diesem Falle hat man die Gesamtmasse vorzuschreiben und es gibt dann ein und nur ein solches Leiterpotential mit diesen konstanten Randwerten und der gegebenen Masse. Man hat aber dabei auch die Konstante als ein Außenpotential anzusehen.

Man sieht also, daß die Randwertaufgabe stets lösbar ist und dies nur in einer Weise.

§ 29.

Bemerkungen über die Gültigkeit bisheriger Entwicklung beim Newtonschen Potential.

Um den Gang der Untersuchung nicht zu unterbrechen, wurde bei der Lösung der Randwertaufgabe durchwegs das Logarithmische Potential zugrunde legt. Die bisher abgeleiteten Sätze sind aber ausnahmslos beim Newtonschen Potentiale ebenfalls richtig. Die Formulierung der Randwertaufgabe und die Reduktion auf die Integralgleichung Fredholms zeigt keinen wesentlichen Unterschied und ist in selbst sich darbietender Analogie durchzuführen. Eine Schwierigkeit scheint sich aber einzustellen, sobald die Reduktion auf die Integralgleichung z. B.

$$\nu(s) + \lambda \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = f(s)$$

oder

$$H(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma\theta) H(\theta s) d\theta = h(\sigma s)$$

vollzogen ist. Hier hat nämlich die Funktion $h(\sigma s)$ den Wert

$$h(\sigma s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_\sigma}\left(\frac{1}{r_{\sigma s}}\right) = \frac{\cos(n_\sigma, r_{s\sigma})}{2\pi r_{s\sigma}^2},$$

worin $(n_\sigma, r_{s\sigma})$ den Winkel zwischen der Normalenrichtung in σ und der Verbindungslinie $r_{s\sigma}$ bedeutet. Der Quotient $r_{s\sigma} : \cos(n_\sigma, r_{s\sigma})$ konvergiert für $\lim s = \sigma$ gegen den Krümmungsdurchmesser des Kurvenbogens $\widehat{s\sigma}$ in einer Normalebene durch s und σ, sobald die Existenz derselben angenommen wird. Man sieht also, daß $h(\sigma s)$ noch in der Größenordnung von $\frac{1}{r_{s\sigma}}$ wächst, wenn s gegen σ konvergiert, so daß die Fredholmsche Theorie nicht direkt anwendbar ist. Man kann sich aber durch folgendes Verfahren helfen.

Untersucht man die durch die Neumannsche Operation aus $h(\sigma s)$ hervorgehenden Randfunktionen

$$h_1(\sigma s) = \int h(\sigma\theta) h(\theta s) d\theta, \qquad h_2(\sigma s) = \int h_1(\sigma\theta) h(\theta s) d\theta$$

so stellt sich leicht heraus, daß $h_1(\sigma s)$ nur mehr in der Größenordnung des $\log \frac{1}{r_{s\sigma}}$ beim Zusammenrücken der Punkte s und σ wächst, daß aber die Funktion $h_2(\sigma s)$ schon überall stetig bleibt. Man hat aber auch hierbei die Annahme gemacht, daß die Normale eindeutig ist und die Krümmung nicht beliebig groß wird.*)

Jetzt ist die Gültigkeit der bisherigen Entwicklung leicht zu erkennen.

Betrachten wir die Integralgleichung für die Funktion $H(\sigma s)$. Diese Funktion $H(\sigma s)$ hängt vom Parameter λ ab. Ersetzen wir in $H(\sigma s)$ den Parameter λ durch $\lambda\zeta$ und $\lambda\zeta^2$, wobei ζ die dritte Einheitswurzel $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ ist und untersuchen gleichzeitig die so erhaltenen Funktionen $H(\sigma s)$, $H_1(\sigma s)$, $H_2(\sigma s)$. Diese Funktionen genügen den Integralgleichungen

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} H(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma\theta) H(\theta s) d\theta &= h(\sigma s), \\ H_1(\sigma s) + \lambda\zeta \int h(\sigma\theta) H_1(\theta s) d\theta &= h(\sigma s), \\ H_2(\sigma s) + \lambda\zeta^2 \int h(\sigma\theta) H_2(\theta s) d\theta &= h(\sigma s), \quad \text{wo } \zeta^2 + \zeta + 1 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} H(\sigma s) + H_1(\sigma s) + H_2(\sigma s) &= 3K(\sigma s) \\ H(\sigma s) + \zeta^2 H_1(\sigma s) + \zeta\, H_2(\sigma s) &= 3K_1(\sigma s) \\ H(\sigma s) + \zeta\, H_1(\sigma s) + \zeta^2 H_2(\sigma s) &= 3K_2(\sigma s) \end{aligned}$$

so bekommt man aus (a) durch Addition nach entsprechender Multiplikation, wegen der Gleichung $\zeta^2 + \zeta + 1 = 0$, die Integralgleichungen:

$$\text{(c)} \qquad \begin{aligned} K_1(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma\theta) K(\theta s) d\theta &= 0 \\ K_2(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma\theta) K_1(\theta s) d\theta &= 0 \\ K(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma\theta) K_2(\theta s) d\theta &= h(\sigma s). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gestatten K_2 durch K_1, K_1 aber wieder durch K auszudrücken. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes ergibt sich nach Einführung der oben definierten Funktion $h_2(\sigma s)$ für $K(\sigma s)$ die Integralgleichung

$$\text{(d)} \qquad K(\sigma s) + \lambda^3 \int h_2(\sigma\theta) K(\theta s) d\theta = h(\sigma s).$$

Auf diese Integralgleichung läßt sich aber die Fredholmsche Methode ohne weiteres anwenden, da ja die Funktion $h_2(\sigma\theta)$, wie erwähnt, allenthalben

---

*) Näheres darüber: J. Plemelj, Randwertaufgaben der Potentialtheorie I. Monatshefte f. Math. u. Phys. 15, 1904, S. 364, 365.

endlich ist. Man bekommt also zunächst $K(\sigma s)$, daraus $K_1(\sigma s)$ und $K_2(\sigma s)$ und durch Addition der Gleichungen (b)

$$H(\sigma s) = K(\sigma s) + K_1(\sigma s) + K_2(\sigma s) \tag{e}$$

oder anders geschrieben

$$H(\sigma s) = K(\sigma s) - \lambda \int h(\sigma\theta) K(\theta s) d\theta + \lambda^2 \int h_1(\sigma\theta) K(\theta s) d\theta. \tag{f}$$

Da sich nun für $K(\sigma s)$ ein Quotient zweier ganzer Funktionen von λ ergibt, so gilt dasselbe auch von $H(\sigma s)$. Nunmehr ist aber auch kein Hindernis mehr, alle Schlüsse wie oben zu ziehen. Es gelingt also auch beim Newtonschen Potential die Lösung durch die Integralgleichung Fredholms.

§ 30.
Beispiele: Kreis und Ellipse.

Die Aufgabe der Bestimmung eines Potential der Doppelschicht

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi} \int \nu(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds,$$

welches das Randwertproblem

$$(1 + \lambda) W(\sigma^+) - (1 - \lambda) W(\sigma^-) = 2\lambda f(s)$$

löst, wollen wir jetzt an zwei Beispielen durchführen, für den Kreis und für die Ellipse. Die Funktion $\nu(s)$ genügt der Integralgleichung

$$\nu(s) + \lambda \int \nu(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = f(s),$$

worin

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}.$$

Die Lösung gelingt hier auf die einfachste Weise. Wir betonen hier nochmals, daß es gänzlich unwesentlich ist, ob wir unter ds ein Bogenelement im Punkte s verstehen oder das Element irgendeiner Randfunktion, welche auf dem Rande eindeutig und eindeutig umkehrbar ist. Dies zeigt ja schon der Anblick vom $W(p)$, worin ds nur in der Verbindung $\frac{d()}{ds} \cdot ds$ auftritt. Von dieser Tatsache machen wir in den Beispielen Gebrauch.

Die Lösung der Randwertaufgabe für den Kreis.

Es handelt sich um die Bestimmung von $\operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$.

Unter s wollen wir hier den Zentriwinkel des Peripheriepunktes, den wir kurz auch mit s bezeichnen, im Kreise, dessen Radius a sei, verstehen. Der Anfangspunkt der Zählung von s ist beliebig, wir wählen ihn in der x-Achse.

Jeder Kreispunkt (x_s, y_s) läßt sich in der Form ausdrücken

$$\begin{aligned} x_s &= a \cdot \cos s \\ y_s &= a \cdot \sin s \end{aligned} \qquad 0 \leqq s \leqq 2\pi, \tag{α}$$

daher ist

$$\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} = \frac{\sin s - \sin \sigma}{\cos s - \cos \sigma} = -\cot \frac{\sigma + s}{2},$$

also

$$(\beta) \qquad \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} = \frac{s + \sigma}{2} + \frac{\pi}{2},$$

wobei es übrigens auf die Konstante $\frac{\pi}{2}$ nicht ankommt. Es ist demnach

$$(\gamma) \qquad h(\sigma s) = \frac{1}{2\pi}.$$

Beim Kreise bekommt man also $h(\sigma s)$ konstant (natürlich bei dieser Wahl des s). Die Lösung der Integralgleichung

$$v(s) + \lambda \int_0^{2\pi} v(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi} = f(s)$$

findet man unter Berücksichtigung, daß darin das Integral von s unabhängig, d. h. konstant ist. Man integriert die Gleichung nach s zwischen 0 und 2π und bekommt

$$(1 + \lambda) \int_0^{2\pi} v(\sigma)\, d\sigma = \int_0^{2\pi} f(s)\, ds,$$

daraus das konstante Integral. Somit ist

$$(\delta) \qquad v(s) = f(s) - \frac{\lambda}{\lambda + 1} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi}.$$

Die Randwertaufgabe ist für $\lambda = 1$ unmittelbar lösbar. Es ist

$$W(s^+) = f(s), \text{ wenn } W(p) = \frac{1}{\pi} \int v(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds,$$

sobald

$$v(s) = f(s) - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi}$$

gesetzt wird. Bezeichnet man die Polarkoordinaten von p mit r und θ, setzt also

$$x = r \cos \theta$$
$$y = r \sin \theta,$$

so bekommt man $W(p)$, d. h.

$$W(p) = \frac{1}{\pi} \int f(s) \left\{ \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} - \frac{1}{2} \right\} ds$$

durch Substitution der Koordinatenwerte $x_s y_s$, xy in der Gestalt

$$(\varepsilon_1) \qquad W(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar\cos(\theta - s) + r^2} \cdot ds \qquad r < a.$$

Diese Formel ist unter dem Namen „*Poissonsche Formel*" bekannt.

Beim Außenproblem ist $\lambda = -1$ zu setzen und $v(s)$ würde sich unendlich ergeben, falls nich gerade $\int_0^{2\pi} f(s)\, ds = 0$ ist. Erfüllt aber die Funktion $f(s)$ nicht diese Bedingung, so würde jedenfalls die Vorgabe der Randwerte

$$f(s) - \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi}$$

eine der Bedingung entsprechende sein. Dann fällt das unendlich werdende Glied in $v(s)$ weg und man bekommt für $v(s)$

$$v(s) = f(s) - \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi}.$$

Das Potential $-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds$ hat jetzt die Randwerte $f(s) - \int_0^{2\pi} f(\sigma) \frac{d\sigma}{2\pi}$, folglich ist

$$U(p) = \int_0^{2\pi} f(\sigma) \cdot \frac{d\sigma}{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} ds$$

ein Potential mit den Randwerten $f(s)$. Da (xy) ein Außenpunkt ist, so kommt es hierin bei $v(s)$ auf eine additive Konstante nicht an, so daß also für $v(s)$ die Funktion $f(s)$ eingesetzt werden kann. Jetzt hat aber $U(p)$ bis auf das Vorzeichen dieselbe Form, wie früher $W(p)$. Es ist also

$$(\varepsilon_2) \qquad U(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s) \frac{r^2 - a^2}{r^2 - 2ra\cos(\theta - s) + a^2} ds \quad r > a$$

ein Außenpotential des Kreises mit den Außenrandwerten $f(s)$. Diese Formel könnte man als *die Poissonsche Formel im Außengebiete des Kreises* bezeichnen. Die eine ist aus der andern leicht durch Inversion am Kreise ableitbar.

Die Lösung des Problemes kann man leicht auch durch Bestimmung der Funktion $H(\sigma s)$ ermitteln. Da $h(\sigma s) = \frac{1}{2\pi}$, so ist

$$H(\sigma s) + \lambda \int_0^{2\pi} H(\tau s) \frac{d\tau}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}.$$

Das Integral ist von σ unabhängig. Integriert man nach σ zwischen 0 und 2π, so bekommt man

$$(1 + \lambda)\int_0^{2\pi} H(\tau s) d\tau = 1,$$

folglich

$$H(\sigma s) = \frac{1}{2\pi} - \frac{\lambda}{(1+\lambda)2\pi},$$

d. h.

$$(\zeta) \qquad H(\sigma s) = \frac{1}{2\pi(1+\lambda)}.$$

Damit ist gezeigt, daß beim Kreise kein anderer singulärer Parameterwert als $\lambda = -1$ existiert und daß der Fredholmsche Nenner $D(\lambda)$ hier lautet

$$(\eta) \qquad D(\lambda) = 1 + \lambda.$$

Die Frage, ob es noch andere geschlossene Kurven gibt, bei denen der Fredholmsche Nenner eine ganze rationale Funktion von λ ist, hat mancherlei Interesse. Es läßt sich da zeigen, daß in einem solchen Falle die Funktion $\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ in eine Produktensumme $\Sigma\varphi(s)\psi(\sigma)$ von endlicher Gliederzahl zerfallen müßte. Ob es aber solche Kurven noch gibt, ob also nicht mit Ausschluß des Kreises schon immer $D(\lambda)$ transzendent ist, konnte ich nicht zeigen.

Die Randwertaufgabe bei der Ellipse.

Die analytische Funktion von $\varrho + i\sigma$:

$$x + iy = E\cos(\sigma - i\varrho)$$

enthält die konjugierten Funktionen:

$$(\vartheta) \qquad \begin{aligned} x &= E\cdot\frac{e^{\varrho}+e^{-\varrho}}{2}\cdot\cos\sigma \\ y &= E\cdot\frac{e^{\varrho}-e^{-\varrho}}{2}\cdot\sin\sigma. \end{aligned}$$

Bei konstant gehaltenem ϱ bekommt man also, sobald man σ zwischen 0 und 2π sich stetig bewegen läßt, alle Punkte einer Ellipse mit den Halbachsen

$$a = E\cdot\frac{e^{\varrho}+e^{-\varrho}}{2}, \qquad b = E\cdot\frac{e^{\varrho}-e^{-\varrho}}{2}$$

und der halben Exzentrizität E. Bei Änderung des ϱ bekommt man konfokale Ellipsen. Die vorliegende Ellipse habe die Halbachsen A, B, denen der Parameter ϱ_0 entspricht, also

$$(\iota) \qquad A = E\cdot\frac{e^{\varrho_0}+e^{-\varrho_0}}{2}, \quad B = E\cdot\frac{e^{\varrho_0}-e^{-\varrho_0}}{2},$$

so daß

$$(\varkappa) \qquad e^{-2\varrho_0} = \frac{A-B}{A+B} = q$$

sich ergibt.

Behufs Lösung der Randwertaufgabe ist $\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ zu bestimmen. Diese Größe ist bis auf den Faktor i der Imaginärteil von $\log(z_s - z_\sigma)$. Man findet allgemein, wenn man

$$\begin{aligned} z &= x + iy = E\cos(\sigma - i\varrho) \\ z_s &= x_s + iy_s = E\cos(s - i\varrho_0) \end{aligned}$$

setzt

$$(\lambda) \qquad z - z_s = -2E\sin\left(\frac{s-\sigma}{2} - i\,\frac{\varrho_0 - \varrho}{2}\right)\sin\left(\frac{s+\sigma}{2} - i\,\frac{\varrho_0 + \varrho}{2}\right).$$

Wenn die Punkte z_s und $z = z_\sigma$ beide auf der Ellipse liegen, also $\varrho = \varrho_0$ ist, so bekommt man wegen $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$$z_s - z_\sigma = E \sin\frac{s-\sigma}{2} \cdot e^{\varrho_0 + i\left(\frac{s+\sigma}{2} + \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \{1 - e^{-2\varrho_0 - i(\sigma+s)}\}$$

oder

$$z_s - z_\sigma = (A+B)\sin\frac{s-\sigma}{2} \cdot e^{i\cdot\frac{s+\sigma+\pi}{2}} \cdot \{1 - qe^{-i(s+\sigma)}\}.$$

Wir benötigen $\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$, d. h. den Imaginärteil. Man bekommt

$$(\mu_1) \qquad \operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma} = \frac{s+\sigma+\pi}{2} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n}\sin n\,(s+\sigma),$$

hingegen würde sich als Realteil $\log r_{s\sigma}$ ergeben:

$$(\mu_2) \qquad \log r_{s\sigma} = \log\left|(A+B)\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| - \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{q^n}{n}\cos n\,(s+\sigma).$$

Die Differentiation von $\operatorname{arctg}\frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}$ liefert

$$(\nu) \qquad h(\sigma s) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty q^n \cos n\,(s+\sigma).$$

Aus der Gleichung für $H(\sigma s)$

$$H(\sigma s) + \lambda\int_0^{2\pi} h(\sigma\tau)\,H(\tau s)\,d\tau = h(\sigma s)$$

bekommt man durch Substitution eines Ausdruckes

$$H(\sigma s) = A_0 + \sum_1^\infty A_n \cos n\sigma + \sum_1^\infty B_n \sin n\sigma$$

zur Bestimmung von $H(\sigma s)$ die Gleichung

$$(1+\lambda)\,A_0 + \sum_1^\infty A_n(1+\lambda q^n)\cos n\sigma + \sum_1^\infty B_n(1-\lambda q^n)\sin n\sigma$$
$$= \frac{1}{2\pi} + \sum \frac{1}{\pi} q^n \cos n\,(s+\sigma).$$

Daraus folgt

$$A_0 = \frac{1}{2\pi(1+\lambda)}, \quad A_n = \frac{q^n}{\pi(1+\lambda q^n)}\cos ns, \quad B_n = -\frac{q^n}{\pi(1-\lambda q^n)}\sin ns.$$

Man findet also die Randfunktion $H(\sigma s)$ in der Form

$$(\pi)\ H(\sigma s) = \frac{1}{2\pi(1+\lambda)} + \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{q^n}{1+\lambda q^n}\cos ns\cos n\sigma - \frac{1}{\pi}\sum_1^\infty\frac{q^n}{1-\lambda q^n}\sin ns \sin n\sigma.$$

Damit ist die Randwertaufgabe bei der Ellipse gelöst. Man kann jetzt die Belegung des Potentials $W(p)$ leicht bestimmen, indem man $H(\sigma s)$ in den Ausdruck für $\nu(s)$ einsetzt, man kann aber auch leicht die zur Poissonschen Formel analogen Formeln entwickeln. Zu diesem Zwecke hat man $H(\sigma s)$ in die Ausdrücke (33) S. 51 einzutragen und kann dann auch noch $\operatorname{arctg}\frac{y-y_s}{x-x_s}$ für beliebig gelegene Punkte (xy) aus Gleichung (λ) S. 71 bestimmen und in (33) S. 51 einsetzen. Für $\lambda = 1$ ergibt sich ungehindert die Lösung für das Innengebiet, für $\lambda = -1$ gibt es ein unendlich wachsendes Glied sobald die Randwerte nicht auf die Neumannsche Konstante Null führen. Ist diese Konstante nicht Null, so läßt man das unendlich wachsende Glied weg. Der endlich bleibende Teil gibt ein Potential, welches die Randwerte bis auf einen konstanten Unterschied, die Neumannsche Konstante, annimmt. Man kann in diesem Falle die erhaltenen Reihen noch summieren. Wenn $\lambda = -1$, d. h. beim Problem im Außengebiete der Ellipse, ist die Summation augenfällig; für $\lambda = 1$, d. h. im Innengebiete, gelingt die Summation durch Verwendung elliptischer Z-Funktionen. Diese Summation wurde von *K. Neumann* (Crelle Journal Bd. 59) durchgeführt.

Es mögen hier noch die Werte der Leiterbelegung $\mathfrak{m}'(\sigma)$ und des Leiterpotentials $\Gamma(p)$ angeführt werden. Die Funktion $\mathfrak{m}'(\sigma)$ ist nach der Definition § 25, Gl. (35) das Residuum von $H(\sigma s)$ für $\lambda = -1$. Die Gleichung (π) des jetzigen Paragraphen gibt also für die Ellipse

$$(\varrho) \qquad \mathfrak{m}'(\sigma) = \frac{1}{2\pi}.$$

Für das Leiterpotential $\Gamma(p)$ bekommt man jetzt nach (38) § 25

$$\Gamma(p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{1}{r_{ps}}\cdot ds.$$

Um dieses Integral auszuwerten, hat man $\log\frac{1}{r_{ps}}$ in eine Reihe zu entwickeln. Diese ergibt sich am einfachsten als Realteil der analytischen Funktion $-\log(z-z_s)$ unter Berücksichtigung der Gleichung (λ). Man bekommt

für alle Innenpunkte, wobei $\varrho < \varrho_0$

$$\log\frac{1}{r_{ps}} = -\log\frac{A+B}{2} + \sum_1^\infty \frac{e^{-n\varrho_0}}{n}\left[(e^{n\varrho}+e^{-n\varrho})\cos ns\cos n\sigma + (e^{n\varrho}-e^{-n\varrho})\sin ns\sin n\sigma\right],$$

für alle Außenpunkte, wobei $\varrho > \varrho_0$

$$\log\frac{1}{r_{ps}} = -\log\frac{a+b}{2} + \sum_1^\infty \frac{e^{-n\varrho}}{n}\left[(e^{n\varrho_0}+e^{-n\varrho_0})\cos ns\cos n\sigma + (e^{n\varrho_0}-e^{-n\varrho_0})\sin ns\sin n\sigma\right].$$

Das Leiterpotential $\Gamma(p)$ hat also den Wert

$$\Gamma(p) = -\log\frac{A+B}{2} \quad \text{innerhalb der Ellipse,}$$

$$\Gamma(p) = -\log\frac{a+b}{2} \quad \text{außerhalb „ „}$$

Beide Werte stimmen, wie es sein muß, am Rande miteinander überein und geben $\Gamma(s) = -\log\frac{A+B}{2}$.

Die Neumannsche Konvergenzkonstante N, die einer gegebenen Funktion $f(s)$ entspricht, ergibt sich nach § 27

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s) \cdot ds,$$

also als arithmetisches Mittel der Funktionswerte $f(\sigma)$. Man hat aber dabei zu beachten, daß σ genau die durch die Gleichung (ϑ) S. 71 definierte Winkelgröße ist.

Der Fredholmsche Nenner ergibt sich aus der Funktion $H(\sigma s)$ unschwer. Seine Faktoren sind $1 + \lambda$, $1 + \lambda q^n$, $1 - \lambda q^n$, wobei $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist. Daraus läßt sich schon eine Produktdarstellung für $D(\lambda)$ herleiten. Daß die Fredholmsche Methode genau

$$D(\lambda) = (1 + \lambda)(1 - \lambda^2 q^2)(1 - \lambda^2 q^4)(1 - \lambda^2 q^6) \ldots$$

für $D(\lambda)$ liefert, ergibt sich sehr einfach aus der auf S. 39 gegebenen Entwicklung für $\log D(\lambda)$. Darnach ist ja

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = \int_0^{2\pi} H(\sigma\sigma)\, d\sigma = \frac{1}{1+\lambda} + \sum_1^{\infty}\left(\frac{q^n}{1+\lambda q^n} - \frac{q^n}{1-\lambda q^n}\right),$$

woraus durch Integration nach λ die obige Produktentwicklung folgt.

Bemerkenswert ist der Umstand, daß sich $D(\lambda)$ bis auf den Faktor $1 + \lambda$ als eine gerade Funktion von λ ergibt. Die späteren Untersuchungen werden zeigen, daß dieses Resultat kein zufälliges, nur bei der Ellipse gültiges ist, sondern daß dieselbe Erscheinung eine allgemeine Eigentümlichkeit des logarithmischen Potentials ist. Dieses Ergebnis wird sich mit wichtigen anderen Sätzen verknüpft erweisen.

Vierter Abschnitt.

Die Zusammenhänge zwischen den Lösungen der Randwertaufgaben im Innen- und Außengebiete.

§ 31.

Die Lösung der Neumann-Poincaréschen Randwertaufgabe führt uns bei beliebigem λ auf eine Hilfsfunktion $H(\sigma s)$, die von den Randwerten völlig unabhängig ist, also nur von der Form des Gebietes und dem Parameter λ abhängt. Die Funktion $H(\sigma s)$ ist eine Randfunktion, da σ und s zwei Punkte der Randkurve sind. Wenn demnach diese Funktion einmal für ein Gebiet bestimmt wurde, dann ist die Lösung der Randwertaufgabe, wie die vorgeschriebenen Randwerte $f(s)$ auch sein mögen, stets eine direkte. Es ergibt sich die Belegung des Potentials $W(p)$

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int \nu(\sigma)\,\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y - y_\sigma}{x - x_\sigma}\cdot d\sigma$$

durch

$$\nu(\sigma) = f(\sigma) - \lambda\int f(\theta)\,H(\theta\sigma)\,d\theta,$$

dabei war $H(\sigma s)$ aus einer der Gleichungen (30) S. 51

$$H(\sigma s) + \lambda\int h(\sigma\theta)\,H(\theta s)\,d\theta = h(\sigma s)$$

$$H(\sigma s) + \lambda\int H(\sigma\theta)\,h(\theta s)\,d\theta = h(\sigma s)$$

zu berechnen, worin

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}.$$

Man kann durch Substitution der erhaltenen Funktion $\nu(s)$ $W(p)$ auch in der Form (33) S. 51 schreiben

$$W(p) = \frac{\lambda}{\pi}\int f(\sigma)\left\{\frac{d}{d\sigma}\operatorname{arctg}\frac{y - y_\sigma}{x - x_\sigma} - \lambda\int H(\sigma\,\theta)\,\frac{d}{d\theta}\operatorname{arctg}\frac{y - y_\theta}{x - x_\theta}\cdot d\theta\right\}d\sigma,$$

so daß jetzt die Größe in der Klammer von der gegebenen Funktion $f(s)$ nicht abhängt. So eine Darstellungsform, aus der die gesuchte Funktion sich durch eine Quadratur über ein Produkt der gegebenen Randwerte und einer davon unabhängigen Randfunktion ergibt, könnte man etwa als *„Greensche Darstellungsform"* bezeichnen. Das Poissonsche Integral für die Lösung beim Kreise hat so eine Gestalt. Es konzentriert sich nunmehr das ganze Interesse auf die Bestimmung der Randfunktion $H(\sigma s)$ oder auch des Klammerausdruckes im obigen Potential $W(p)$. Diese Klammerngröße hängt aber