

sein. Die so konstruierten n Funktionen genügen, wegen der Gleichungen (15), denen die Funktion $h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{y_\sigma - y_s}{x_\sigma - x_s}$ Folge leistet, sämtlich der ersten Integralgleichung (34). Es gibt also auch mindestens n Lösungen der zweiten Integralgleichung, wir bezeichnen sie mit

$$(39b) \quad m'_1(s), \quad m'_2(s), \quad \dots \quad m'_n(s)$$

und nennen sie „natürliche Belegungen“ oder „Leiterbelegungen“. Die Funktion $H(\sigma s)$ hat hier die Entwicklung

$$H(\sigma s) = \frac{P(\sigma s)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma s),$$

worin für $\lambda = -1$ die Funktion $\mathfrak{H}(\sigma s)$ regulär ist. Das Residuum $P(\sigma s)$ zerfällt nach dem auf Seite 38 auseinandergesetzten in eine Summe von Produkten

$$(40) \quad P(\sigma, s) = m'_1(\sigma) v_1(s) + m'_2(\sigma) v_2(s) + \dots + m'_n(\sigma) v_n(s).$$

Daß es nicht mehr Glieder gibt, werden wir gleich erkennen. Die Integralbeziehungen (χ), S. 38

$$(41) \quad \int m'_\lambda(\sigma) v'_\lambda(\sigma) d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{für } \lambda = \lambda \\ 0 & \text{„ } \lambda \neq \lambda \end{cases}$$

ergeben sofort unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $v_\lambda(s)$, [siehe (39a)], nur auf der λ ten Kurve nicht Null und zwar $= 1$ ist, daß $\int m'_\lambda(\sigma) d\sigma = 1$, wenn die Integration sich nur über die λ te Kurve erstreckt. Dies folgt aus (41), wenn $\lambda = \lambda$ gesetzt wird. Bei der Erstreckung über eine andere, als die λ te Kurve ergibt sich $\int m'_\lambda(\sigma) d\sigma = 0$; dies erhält man, wenn man $\lambda \neq \lambda$ setzt. Wir haben also in (39b) n Leiterbelegungen, die uns als Dichtigkeiten von Potentialen der einfachen Schicht genommen, n Potentiale

$$(42) \quad \Gamma_1(p), \quad \Gamma_2(p), \quad \dots \quad \Gamma_n(p)$$

geben, von denen jedes nur auf je einer der n Randkurven eine nicht verschwindende Masse $= 1$ besitzt, auf jeder der Randkurven aber je einen konstanten Randwert annimmt. (Die Basis der Leiterpotentiale.)

Daß die Randwerte konstant sind, folgert man, wie oben, aus den Gleichungen $\frac{\partial V}{\partial n}(s^+) = 0$, denen nach (34) jedes durch ein $m'(s)$ erzeugte Potential der einfachen Schicht entspricht.

Die erhaltenen Lösungen sind nun tatsächlich die einzig vorhandenen. Würde es nämlich noch eine Lösung $m'(s)$ geben, so könnte man durch geeignete Wahl der Konstanten c_1, c_2, \dots, c_n erreichen, daß die Funktion $m'(s) - c_1 m'_1(s) - c_2 m'_2(s) - \dots - c_n m'_n(s)$ bei der Integration über jede Randkurve einzeln Null wäre. Man würde so eine Lösung von

$$m'(s) - \int h(\sigma s) m'(\sigma) d\sigma = 0$$

erhalten, die auf ein Potential V führen würde, das auf jeder einzelnen Randkurve die Masse Null und je einen konstanten Randwert hätte. So ein

Potential ist aber, weil im Unendlichen nach S. 17 allenthalben gleich Null. Damit ist der Beweis zu Ende.

Wir hatten oben für den Fall einer einzigen Randkurve der Funktion $H(\sigma s)$ die Form gegeben

$$H(\sigma, s) = \frac{m'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma, s),$$

worin $\mathfrak{H}(\sigma s)$ eine reguläre Potenzreihe nach $(\lambda + 1)$ bedeutet. An dieser Darstellung können wir auch bei n Randkurven festhalten, müssen aber berücksichtigen, daß dieses $m'(\sigma)$ jetzt nichts anderes ist, als $m'_1(\sigma)v_1(s) + \dots + m'_n(\sigma)v_n(s)$. Da nun sobald s auf der n ten Kurve liegt, alle $v(s)$ Null werden, bis auf $v_n(s) = 1$, so sieht man, daß man hier nur annehmen muß, daß $m'(\sigma)$ eine andere Funktion von σ wird, wenn s auf eine andere der Randkurven tritt, daß aber $m'(\sigma)$ von der näheren Lage des zweiten Punktes s nicht abhängt; mit anderen Worten, *unter der Funktion $m'(\sigma)$ wird eine der Randfunktionen (39 b)*

$$m'_1(\sigma), \quad m'_2(\sigma), \quad \dots \quad m'_n(\sigma)$$

zu verstehen sein, je nachdem s auf der 1ten, 2ten, ... nten Randkurve liegt, ist aber sonst von s nicht näher abhängig.

§ 26.

Die Bestimmung der Belegung und der Funktion $H(\sigma s)$.

Nachdem erkannt worden ist, daß $+1$ kein singulärer Wert für den Parameter λ ist, -1 aber als solcher sich ergeben hat, ist es überaus einfach die Belegung eines Potential W zu bestimmen, welches der Randwertaufgabe (29 a) S. 51 genügt, dies selbst für den Fall, daß λ gerade ± 1 wird. Wir haben die Integralgleichung (27 a) S. 50

$$(43) \quad v(s) + \lambda \int v(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = f(s)$$

zu lösen, was durch Bestimmung von $H(\sigma s)$ aus (30) S. 51

$$(44) \quad H(\sigma s) + \lambda \int h(\sigma \theta) H(\theta s) d\theta = h(\sigma s)$$

geschehen kann. Die Belegung $\frac{\lambda}{\pi} v(s)$ ergibt sich dann aus (32) S. 51

$$(45) \quad v(s) = f(s) - \lambda \int f(\sigma) H(\sigma s) d\sigma.$$

Im vorangehenden Paragraphen erhielten wir für $H(\sigma s)$ eine Darstellung der Form

$$(46) \quad H(\sigma s) = \frac{m'(\sigma)}{\lambda + 1} + \mathfrak{H}(\sigma s),$$

worin \mathfrak{H} die Stelle $\lambda_0 = -1$ nicht mehr als singuläre Stelle besitzt. Es ist also $\mathfrak{H}(\sigma s)$ in einem größeren Kreise regulär, als es der Einheitskreis $|\lambda| = 1$ ist, folglich als eine über den Einheitskreis hinaus konvergente Potenzreihe von λ darstellbar.

Die Funktion $h(\sigma s)$ hat, wie bisher, den Wert

$$h(\sigma s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{d}{d\sigma} \arctg \frac{y_s - y_\sigma}{x_s - x_\sigma}.$$

Aus (44) kann man für $H(\sigma s)$ die Potenzreihenentwicklung nach λ herstellen. Diese lautet

$$(47) \quad H(\sigma s) = h(\sigma s) - \lambda h_1(\sigma s) + \lambda^2 h_2(\sigma s) - \lambda^3 h_3(\sigma s) + \dots$$

worin die Funktionen h_1, h_2, h_3, \dots nacheinander jede aus der vorangehenden durch die Gleichung

$$(48) \quad h_{x+1}(\sigma s) = \int h_x(\sigma \theta) h(\theta s) d\theta$$

hervorgehen.

Wir führen für den Vorgang bei der Bildung einer Folge von Funktionen, wie h, h_1, h_2, \dots eine eigene Benennung ein. Wird aus einer Funktion $f(s)$ durch Bildung des Integrals

$$(49) \quad f_1(s) = \int f(\theta) h(\theta s) d\theta$$

eine neue Funktion $f_1(s)$ gebildet, so bezeichnen wir $f_1(s)$ als durch Anwendung der Neumannschen Operation aus $f(s)$ erzeugt, sobald $h(\sigma s)$ die obige Funktion ist. Die Funktionen $h_1(\sigma s), h_2(\sigma s), \dots$ gehen also als Funktionen von s betrachtet aus $h(\sigma s)$ durch wiederholte Anwendung der Neumannschen Operation hervor.

Die oben erhaltene Reihe für $H(\sigma s)$ ist nur für $|\lambda| < 1$ konvergent, da $H(\sigma s)$ wegen (46) in $\lambda = -1$ einen einfachen Pol hat. Berechnet man aber die Reihenentwicklung für $\mathfrak{H}(\sigma s)$, so ergibt sich, wie bereits gesagt, eine über den Einheitskreis $|\lambda| = 1$ konvergente Reihe. Man findet aus (46) sofort

$$\mathfrak{H}(\sigma s) = H(\sigma s) - \frac{m'(\sigma)}{1 + \lambda}$$

und wegen (47) daraus

$$(50) \quad \mathfrak{H}(\sigma s) = [h(\sigma s) - m'(\sigma)] - \lambda [h_1(\sigma s) - m'(\sigma)] + \lambda^2 [h_2(\sigma s) - m'(\sigma)] - \dots$$

Diese Reihe konvergiert über den Einheitskreis. Weil dies stattfindet, so müssen die Koeffizienten der λ^x unter jeden Betrag fallen. Es ist also

$$(51) \quad m'(\sigma) = \lim_{x \rightarrow \infty} h_x(\sigma s).$$

Damit haben wir schon eine Bestimmungsmethode für die natürliche Belegung $m'(\sigma)$ gefunden. Wir können den Satz aussprechen:

Die durch wiederholte Anwendung der Neumannschen Operation aus $h(\sigma s)$ (als Funktion von s) hervorgehenden aufeinanderfolgenden Funktionen

$$(52) \quad h_1(\sigma s), h_2(\sigma s), h_3(\sigma s), \dots$$

konvergieren gegen eine von s unabhängige Funktion $m'(\sigma)$ von σ , welche Leiterbelegung oder natürliche Belegung genannt wurde, sobald das Gebiet von einer einzigen Kurve umschlossen wird.

Besteht die Begrenzung aus n sich ausschließenden für sich geschlossenen Kurven, so konvergieren die Funktionen $h_x(\sigma s)$ gegen n verschiedene Funktionen

$$m'_1(\sigma), m'_2(\sigma), \dots, m'_n(\sigma)$$

des Punktes σ , je nachdem s auf der 1ten, 2ten, ... nten Randkurve liegt, aber sonst unabhängig von der genaueren Lage von s .

Diese Funktionen geben, als Dichtigkeiten von Potentialen der einfachen Schicht betrachtet, n Potentiale $\Gamma_1(p), \Gamma_2(p), \dots, \Gamma_n(p)$, die auf jeder Randkurve irgendwelche konstanten Werte besitzen und jedes auf nur je einer Randkurve eine nichtverschwindende Masse = 1 hat.

§ 27.

Die K. Neumannschen Reihen.

Nachdem wir nun eine selbst für $\lambda = \pm 1$ noch sicher gültige Reihenentwicklung (50) für die Funktion $\mathfrak{S}(\sigma s)$ besitzen, sind wir auch imstande eine ganz ähnliche Entwicklung für die Funktion $\nu(s)$ zu geben. Eine solche Entwicklung bekommt man leicht schon durch Einsetzen von (46) (50) in die Formel (45) für $\nu(s)$. Es zeigt sich, daß $\nu(s)$ ein für $\lambda = -1$ unendlich wachsendes Glied besitzt, welches den Betrag

$$\frac{1}{\lambda + 1} \int f(\sigma) m'(\sigma) d\sigma$$

hat. Die Konstante

$$(53) \quad N = \int f(\sigma) m'(\sigma) d\sigma$$

heißt die Neumannsche Konstante, die der Randfunktion $f(\sigma)$ entspricht.

Die Funktion $\nu(s)$ besitzt das Unendlichwerden $\frac{N}{\lambda + 1}$, während

$$(54) \quad \nu(s) - \frac{N}{\lambda + 1} \equiv \nu_1(s) = f(s) - N - \lambda \int f(\sigma) \mathfrak{S}(\sigma s) ds$$

nicht mehr unendlich wird. Setzt man $\nu(s) = \nu_1(s) + \frac{N}{\lambda + 1}$ in die Integralgleichung für $\nu(s)$ ein, so zeigt sich, daß $\nu_1(s)$ der Integralgleichung

$$(55) \quad \nu_1(s) + \lambda \int \nu_1(\sigma) h(\sigma s) d\sigma = f(s) - N$$

genügt, also $\frac{\lambda}{\pi} \nu_1(s)$ als Belegung eines Potentials $\mathfrak{B}(p)$ genommen die Randwertaufgabe

$$(56) \quad (1 + \lambda) \mathfrak{B}(s^+) - (1 - \lambda) \mathfrak{B}(s^-) = 2\lambda [f(s) - N]$$

löst. Diese Randwertaufgabe ist also sobald N die Neumannsche Konstante ist, lösbar selbst, wenn $\lambda = \pm 1$ ist. Für $\nu_1(s)$ kann man eine Reihenentwicklung entweder durch Einsetzen des $\mathfrak{S}(\sigma s)$ in (54) erhalten oder, noch einfacher, durch direkte Reihenentwicklung aus (55). Man bekommt*)

$$\nu_1(s) = [f(s) - N] - \lambda [f_1(s) - N] + \lambda^2 [f_2(s) - N] - \lambda^3 [f_3(s) - N] + \dots$$

eine Reihe, die selbst für $\lambda = \pm 1$ konvergiert. Die Neumannsche Konstante ist wieder der Grenzwert

$$N = \lim_{z \rightarrow \infty} f_n(s) = f_\infty.$$

Das hier erhaltene Resultat können wir für $\lambda = \pm 1$ spezialisieren und in folgendem Satze angeben:

*) Die Neumannsche Operation reproduziert wegen $\int h(\sigma s) d\sigma = 1$ jede Konstante.

Bezeichnet man mit N die Neumannsche Konstante, welche der Randfunktion $f(s)$ zukommt, so werden die beiden Randwertaufgaben

$$(57) \quad \mathfrak{W}(s^+) = f(s) - N \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}(s^-) = f(s) - N$$

durch zwei Potentiale der doppelten Schicht

$$(58) \quad \mathfrak{W}(p) = \frac{1}{\pi} \int v(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} \cdot ds$$

gelöst, sobald man für $v(s)$ die Funktionen

$$(59) \quad v(s) = \pm [f(s) - N] - [f_1(s) - N] \pm [f_2(s) - N] - [f_n(s) - N] \pm \dots$$

wählt.

Man sieht also, daß die Randwertaufgabe lösbar ist bis auf eine additive Konstante N . Diese Einschränkung ist sehr natürlich, es wurde ja als wesentliche Forderung des Neumann-Poincaréschen Problems festgesetzt, daß das Potential ein solches der Doppelschicht sein müsse. Dadurch hat man aber für den Fall $\lambda = -1$ etwas im allgemeinen unmögliches verlangt, da ja die Konstante, wenn nicht Null, niemals als ein Potential der Doppelschicht im Außengebiet darstellbar sein kann, da jedes W im Unendlichen verschwindet. Die Lösbarkeit im Innengebiet, also für $\lambda = 1$, ist aber wirklich stets vorhanden, da die Konstante als ein Potential W im Innengebiet darstellbar ist. Im Falle $\lambda = +1$ ist die Funktion $H(\sigma s)$ nach (46) stets endlich, so daß wir die Funktion $v(s)$ nach (45) für die Randfunktion schon direkt für $f(s)$ und nicht erst für $f(s) - N$ bilden könnten.

Stillschweigend wurde bei der Formulierung des obigen Satzes die Annahme gemacht, daß die Begrenzung aus einem einzigen Kurvenzuge besteht. Wenn es sich aber z. B. um ein Gebiet handelt, welches von mehreren sich ausschließenden Kurvenzügen besteht, so ist, wie wir bereits gesehen haben, die Funktion $m'(\sigma)$ in (46) doch nicht ganz unabhängig von s , sondern wird zu verschiedenen Funktionen $m'_1(\sigma)$, $m'_2(\sigma)$, \dots , $m'_n(\sigma)$ je nachdem s auf der 1ten, 2ten, \dots , n ten Kurve liegt. In diesem Falle ist auch die Neumannsche Konstante N , die durch (53) berechnet werden kann, von s nicht ganz unabhängig, sondern bedeutet verschiedene Konstanten, je nachdem s auf der 1ten, 2ten, \dots , n ten Randkurve liegt. Um diese Abhängigkeit hervortreten zu lassen, bezeichne man die Neumannsche Konvergenzkonstante zweckmäßig mit N_s . Für diesen Fall können wir also sagen:

Ist ein Außengebiet n fach zusammenhängend, so nimmt das Potential der Doppelschicht

$$\mathfrak{W}(p) = \frac{1}{\pi} \int v(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} ds,$$

worin

$$v(s) = - [f(s) - N_s] - [f_1(s) - N_s] - [f_2(s) - N_s] - \dots$$

ist, gegebene Randwerte $f(s)$ auf jeder der Randkurven bis auf je eine additive Konstante N_s an. Dabei bedeutet N_s im allgemeinen eine andere Konstante, je nachdem s auf der 1ten, 2ten, \dots , n ten Randkurve liegt, ist aber von der genauen Lage des Punktes s nicht abhängig; N_s ist der Grenzwert, dem die Neumannsche Funktionsfolge $f(s)$, $f_1(s)$, $f_2(s)$, \dots zustrebt.

Das Potential $\mathfrak{B}(p)$ nimmt also beliebig vorgelegte Randwerte $f(s)$ nicht genau an, sondern auf jeder Kurve nur bis auf je einen additiven Unterschied. Mehr läßt sich durch ein Potential der Doppelschicht auch gar nicht erreichen, wie wir bereits auf S. 41 gesehen haben. *Das hier gefundene Potential \mathfrak{B} nimmt aber eine ausgezeichnete Stellung ein; es hat nämlich auf jeder Kurve einzeln die Masse Null und verschwindet im Unendlichen.* Dies ist das einzige Potential dieser Eigenschaft bei den Randwerten $f(s)$ und hat als solches eine große physikalische Wichtigkeit. So führt z. B. das Problem der elektrischen Induktion auf mehreren ungeladenen Konkurrenten direkt auf die Bestimmung eines solchen Potentials, dessen Randwerte nur bis auf unbekannte konstante Unterschiede — die obigen N_s — gegeben sind. Diese Konstanten sind dann die Potentialwerte auf den gegebenen ungeladenen Leitern.

Statt nach den eben gefundenen Sätzen das Potential mit gegebenen Randwerten $f(s) - N$ durch Bestimmung seiner Belegung $\frac{1}{\pi}\nu(s)$ zu ermitteln, kann man direkt für das Potential eine Reihe herleiten.

Handelt es sich um das Innengebiet, so ist in (59) das obere Zeichen zu nehmen und man bekommt durch Zusammenfassung je zweier Glieder

$$\nu(s) = [f(s) - f_1(s)] + [f_2(s) - f_3(s)] + [f_4(s) - f_5(s)] + \dots,$$

offenbar eine konvergente Reihe. Bestimmt man also mit den Funktionen $f(s), f_1(s), f_2(s), \dots$ die Folge von Potentialen

$$\omega_x(p) = \frac{1}{\pi} \int f_x(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} ds,$$

so hat das Potential

$$(60a) \quad N + [\omega(p) - \omega_1(p)] + [\omega_2(p) - \omega_3(p)] + [\omega_4(p) - \omega_5(p)] + \dots$$

am Innenrande genau die Randwerte $f(s)$. *Dies ist die K. Neumannsche Reihe für das Innengebiet.*

Ähnlich hat man im Außengebiet vorzugehen. Hier bekommt man die Belegung $\frac{1}{\pi}\nu(s)$ aus:

$$\nu(s) = -[f(s) - N_s] - [f_1(s) - N_s] - [f_2(s) - N_s] - \dots$$

Um die Reihenentwicklung für das Potential $\mathfrak{B}(p)$ mit den Randwerten $f(s) - N_s$ zu finden, hat man zunächst die Potentiale der Doppelschicht mit den einzelnen Gliedern von $\nu(s)$, d. h. mit den $[f_x(s) - N_s]$ zu bilden. Da aber hier p ein Außenpunkt ist, so ist für jede Konstante N die Gleichung $\int N \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} ds = 0$ nach S. 19 erfüllt. Bestimmt man also die Potentiale

$$\omega_x(p) = \frac{1}{\pi} \int f_x(s) \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y - y_s}{x - x_s} ds,$$

so nimmt das Potential

$$(60b) \quad -\omega(p) - \omega_1(p) - \omega_2(p) - \dots$$

am Rande die Werte $f(s) - N_s$ an. Dieses ist die Neumannsche Reihe für das Außengebiet. Wenn das Gebiet einfach zusammenhängt, so ist N_s eine von s ganz unabhängige Konstante. Addiert man diese Konstante zur Reihe hinzu, so erhält man ein Potential mit den Werten $f(s)$ am Rande und dem konstanten Wert N im Unendlichen. Ist aber das Gebiet nicht einfach zusammenhängend, so hat N_s einen im allgemeinen anderen konstanten Wert, je nachdem s auf der 1ten, 2ten, ... n ten Randkurve liegt. Das System dieser n Konstanten ergibt sich den n Kurven entsprechend

$$\int f(\sigma) m'_1(\sigma) d\sigma, \int f(\sigma) m'_2(\sigma) d\sigma, \dots \int f(\sigma) m'_n(\sigma) d\sigma$$

wobei $m'_1(\sigma), m'_2(\sigma), \dots, m'_n(\sigma)$ die oben definierten n natürlichen Belegungen sind.

§ 28.

Zwei Leiterprobleme.

Wenn gegebene Randwerte durch ein Potential genau darzustellen sind, so ist es, wie die Betrachtungen des vorigen Paragraphen ergeben haben, im allgemeinen bei Außenproblemen nicht möglich, der Forderung durch ein solches Potential Genüge zu leisten, welches auf der Randkurve, und, wenn es ihrer mehrere gibt, auf jeder Randkurve eine verschwindende Masse besitzt und im Unendlichen Null wird. Es wurde aber gezeigt, daß es tatsächlich stets ein solches Potential gibt — wir haben ihm die Form eines Potentials der Doppelschicht gegeben — welches am Rande die gegebenen Randwerte $f(s)$ bis auf je einen additiven Unterschied auf jeder Kurve annimmt. Es kann aber auch die Frage nach der genauen Darstellung der gegebenen Randwerte vorliegen. Glücklicherweise hat die vorangehende Untersuchung auch noch den letzten Rest geliefert, den wir zur vollständigen Beantwortung der Frage benötigen.

Bei Vorhandensein von n Randkurven*) gibt es genau n Funktionen

$$m'_1(\sigma), m'_2(\sigma), \dots, m'_n(\sigma)$$

die natürliche Belegungen genannt werden und als Dichten von Potentialen der einfachen Schicht genau n auf jeder Randkurve konstante Potentiale

$$\Gamma_1(p), \Gamma_2(p), \dots, \Gamma_n(p)$$

„Leiterpotentiale“ liefern, von der Beschaffenheit, daß jedes $\Gamma_\kappa(p)$ nur auf der κ -ten Kurve eine nichtverschwindende Masse = 1 hat. Diese letzte Tatsache ergab sich aus dem Umstand, daß $\int m'_\kappa(\sigma) ds$ erstreckt nur über die κ -te Kurve den Wert 1, über jede andere aber den Wert Null gibt. Man kann die Potentiale $\Gamma_\kappa(p)$ in der Form schreiben

$$\Gamma(p) = \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot m'_\kappa(s) ds \quad \text{oder} \quad \int \log \frac{1}{r_{ps}} \cdot dm'_\kappa(s)$$

*) Der Einfachheit halber wurden diese Kurven so angenommen, daß sie sich abschließen, es wäre aber leicht gewesen, sie in allgemeinerer Lage, also etwa auch ineinander anzunehmen. In diesem Falle hätte sich bei der vorangehenden Untersuchung auch $\lambda = +1$ als singulärer Parameter herausgestellt, ohne sonstige Verwicklungen.

wenn wir mit $dm_x(s)$ die Masse $m_x'(s)ds$ auf dem Element ds bezeichnen. Die natürliche Dichtigkeit $m_x'(s)$ ist dann die Ableitung der natürlichen Massenverteilung am Rande, d. h. $m'(s) = \frac{dm(s)}{ds}$. Die Massenverteilungsfunktion $m_x(s)$ ist also durchaus stetig auf allen Randkurven bis auf die x -te, wo nach einmaligem Umlauf der Unterschied 1 sich ergibt, weil auf der x -ten Kurve $\int m_x'(\sigma) d\sigma = 1$ ist.

Von hervorragenden mathematischen und physikalischen Interesse sind die beiden folgenden Probleme:*)

1. Es ist ein Leiterpotential zu finden, welches auf jeder der geschlossenen Kurven eine gegebene Masse besitzt.

2. Es ist ein Leiterpotential zu finden, welches auf jeder der geschlossenen Kurven je einen gegebenen konstanten Wert hat und eine gegebene Gesamtmasse besitzt.

Hervorgehoben sei noch, daß wir die Konstante auch als ein Potential im Außengebiet anzusehen haben.

Das erste dieser beiden Probleme erledigt sich sofort. Sind $c_1 c_2 \dots c_n$ die gegebenen Massen auf der 1ten, 2ten ... nten Kurve, so löst das Potential $c_1 \Gamma_1(p) + c_2 \Gamma_2(p) + \dots + c_n \Gamma_n(p)$ die Aufgabe. Dieses ist bis auf eine additive Konstante auch die einzige Lösung, da die Differenz zweier Lösungen auf jeder Kurve die Masse Null und je einen konstanten Wert hätte; so ein Potential ist nach dem Satze auf S. 17 konstant.

Um das zweite Problem zu lösen, setzen wir die Lösung $\Gamma(p)$ in der Form an

$$\Gamma(p) = c + c_1 \Gamma_1(p) + c_2 \Gamma_2(p) + \dots + c_n \Gamma_n(p).$$

Die Gesamtmasse sei m und die Werte auf den einzelnen Kurven nacheinander C_1, C_2, \dots, C_n . Bezeichnet man den konstanten Wert von $\Gamma_x(p)$ auf der λ -ten Kurve mit $\Gamma_{x\lambda}$, so hat man zur Bestimmung von c, c_1, c_2, \dots, c_n die Gleichungen

$$\begin{aligned} m &= c + c_1 + c_2 + \dots + c_n \\ C_1 &= c + c_1 \Gamma_{11} + c_2 \Gamma_{21} \dots + c_n \Gamma_{n1} \\ C_2 &= c + c_1 \Gamma_{12} + c_2 \Gamma_{22} \dots + c_n \Gamma_{n2} \\ &\dots \\ C_n &= c + c_1 \Gamma_{1n} + c_2 \Gamma_{2n} \dots + c_n \Gamma_{nn}. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen und der obigen ergibt sich $\Gamma(p)$ durch Elimination von c, c_1, c_2, \dots, c_n in Determinantenform

$$\begin{vmatrix} \Gamma(p), 1, \Gamma_1(p), \Gamma_2(p), \dots, \Gamma_n(p) \\ m, 0, 1, 1, \dots, 1 \\ C_1, 1, \Gamma_{11}, \Gamma_{21}, \dots, \Gamma_{n1} \\ C_2, 1, \Gamma_{12}, \Gamma_{22}, \dots, \Gamma_{n2} \\ \dots \\ C_n, 1, \Gamma_{1n}, \Gamma_{2n}, \dots, \Gamma_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

*) Vgl. Zaremba loc. cit. 1902 und den Beweisversuch E. R. Neumanns: *Math. Ann.* Bd. 56.

Aus dieser Determinante ist $\Gamma(p)$ unter allen Umständen bestimmbar, da die Unterdeterminante des Eckgliedes $\Gamma(p)$ von Null verschieden ist. Würde dies nämlich nicht der Fall sein, so wäre das obige Gleichungssystem in homogener Form, d. h. für $m = C_1 = C_2 = \dots = C_n = 0$ durch nicht sämtlich verschwindende $c_1 c_2 \dots c_n$ lösbar. Dies würde ein Potential $\Gamma(p)$ mit verschwindender Gesamtmasse und den Randwerten Null ergeben. So ein Potential verschwindet nach Seite 40 identisch.

Nach dem soeben bewiesenen Satze gibt es z. B. ein und nur ein Leiterpotential, welches am Rande aller Kurven Null ist und die Gesamtmasse 1 hat. Dieses wird die Form haben $\Gamma(p) = c + c_1 \Gamma_1(p) + \dots + c_n \Gamma_n(p)$. Weil $\Gamma_1(p), \dots, \Gamma_n(p)$ als Potentiale der einfachen Schicht von der Gesamtmasse 1 im Unendlichen die Entwicklung haben

$$\Gamma_n(p) = \log \frac{1}{R} + (0)_n$$

wo $(0)_n$ ein im Unendlichen verschwindendes Potential ist, so bekommt man für große Distanzen R für $\Gamma(p)$ die Darstellung

$$c + \log \frac{1}{R} + (0),$$

und das Potential $c_1 \Gamma_1(p) + \dots + c_n \Gamma_n(p)$ hat im Unendlichen eine Entwicklung

$$\log \frac{1}{R} + (0)$$

am Rande aber überall den Wert $-c$. Man kann also behaupten:

Es gibt stets ein und nur ein Potential, welches auf der ganzen Berandung überall denselben (noch unbekanntem) konstanten Wert hat und im Unendlichen eine Entwicklung der Form

$$\log \frac{1}{R} + (0)$$

besitzt, worin (0) ein im Unendlichen verschwindendes Potential ist.

Wollte man die Konstante nicht als ein Außenpotential ansehen, so könnte man sich von der früheren additiven Konstante c zu befreien trachten, indem man über die Masse m nichts voraussetzt, dafür aber verlangt, daß im Unendlichen eine Entwicklung $m \log \frac{1}{R} + (0)$ besteht. Man müßte in diesem Falle den konstanten Randwert c mit Hilfe des soeben bestimmten Potentials $\Gamma(p)$ darstellen. Dies gelingt wohl, wenn der Randwert von $\Gamma(p)$ selbst nicht Null ist, was aber z. B. schon beim Einheitskreis, wo $\Gamma(p) = \log \frac{1}{R}$ ist, eintritt. Es würden sich so singuläre Fälle ergeben, wo die Randwertaufgabe nicht lösbar wäre. Dieser singuläre Fall tritt nun sogar bei jeder beliebigen Begrenzung ein, wenn die Einheit der Distanzmessung geeignet gewählt wird, da bei einer Änderung der Einheit in $\log \frac{1}{R} + (0)$ eine Konstante additiv hinzutritt. Tatsächlich veranlaßt nichts zur Stellung der Randwertaufgabe in der Weise, daß von der Lösung im Unendlichen gerade eine Darstellung $m \log \frac{1}{R} + (0)$ verlangt wird; die Angabe der Masse m ist